

Le cube de Rubik et autres casse-têtes

Frédéric Mouton



(Grenoble) et Lycée Buffon (Paris)

15 février 2014, Palais de la Découverte



- 1 Le cube de Rubik
- 2 Ordre d'une permutation
- 3 Permutations composées
- 4 Commutateurs et formules magiques
- 5 Conjugaison et pratique
- 6 Autres questions mathématiques

Le cube de Rubik

Ernő Rubik, 1974

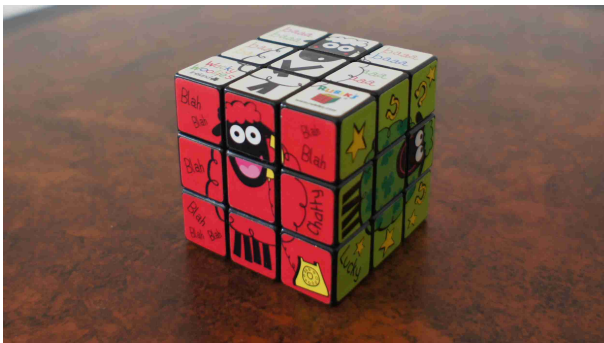


Autres casse-têtes de type Rubik

Autres casse-têtes de type Rubik



Manipulation



Mécanisme

Mécanisme



Le but du jeu

Le but du jeu



En pratique...

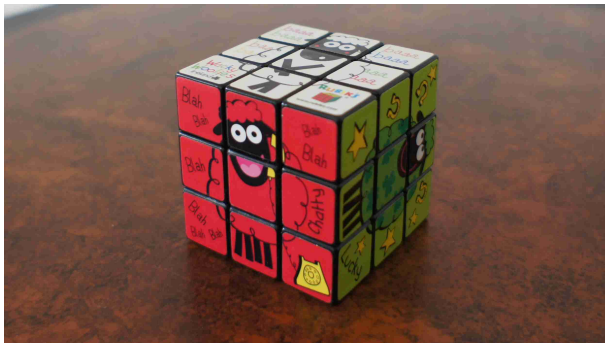
En pratique... on est souvent bloqué là !



Le remède...

Le remède... des formules magiques

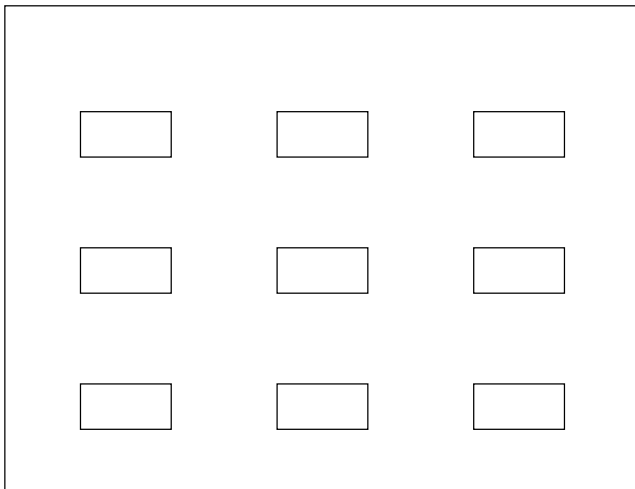
$\overline{GAD\overline{A}G\overline{A}D\overline{A}}$



Ordre d'une permutation

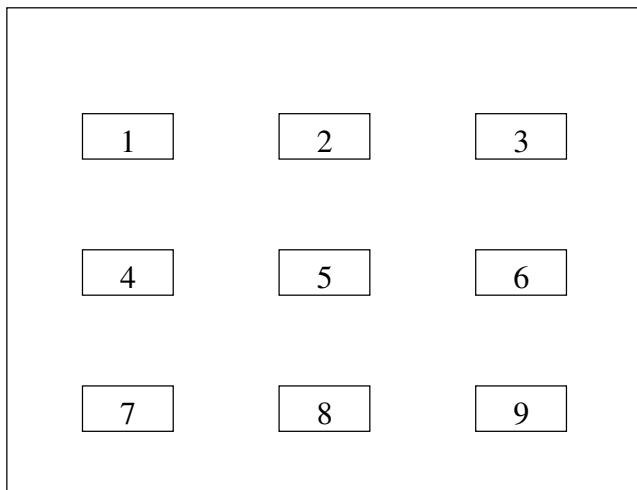
Une classe

Une classe

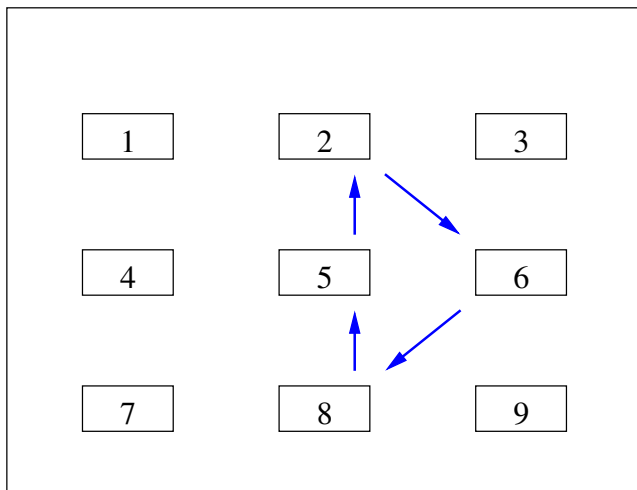


Un professeur étrange

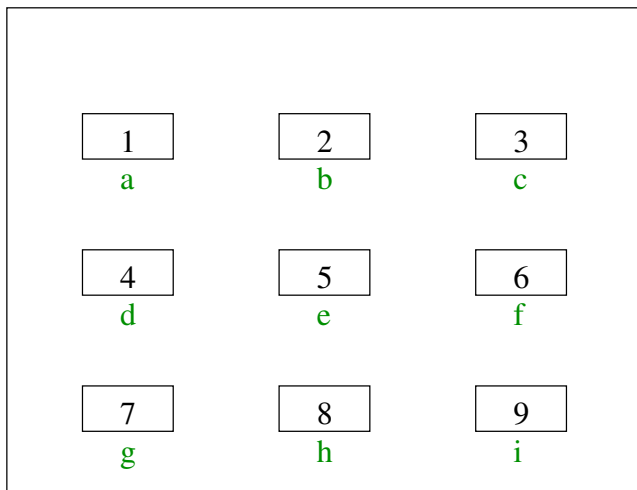
Un professeur étrange



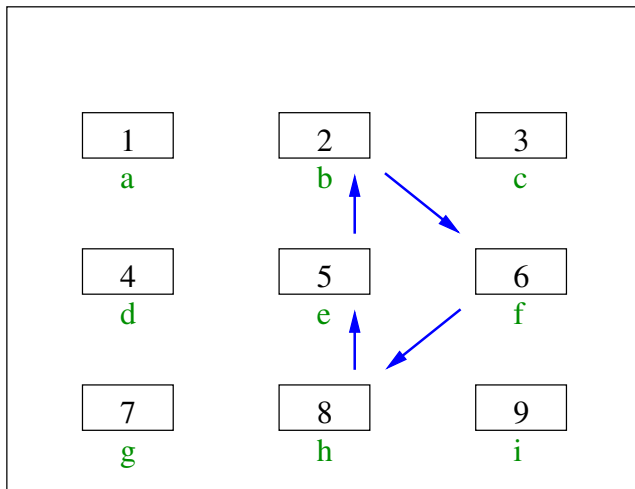
Permutation $V = (2685)$



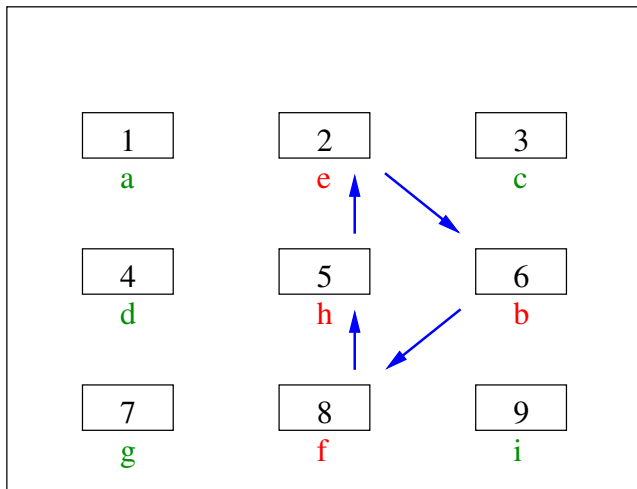
Lundi



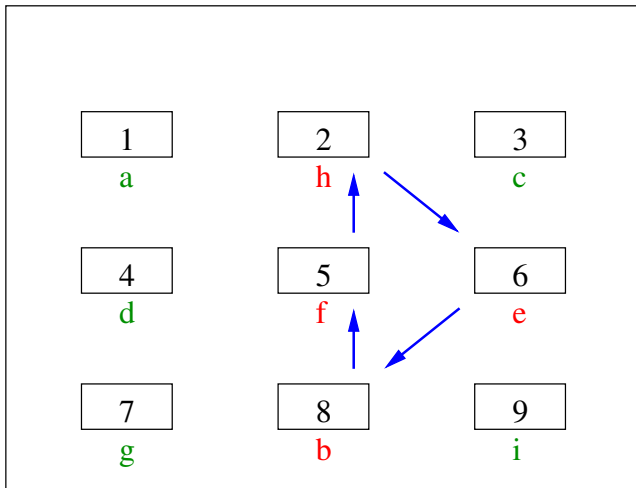
Lundi



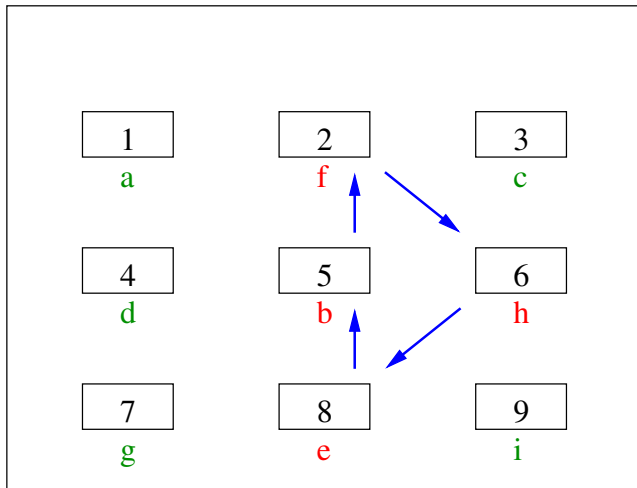
Mardi : permutation V



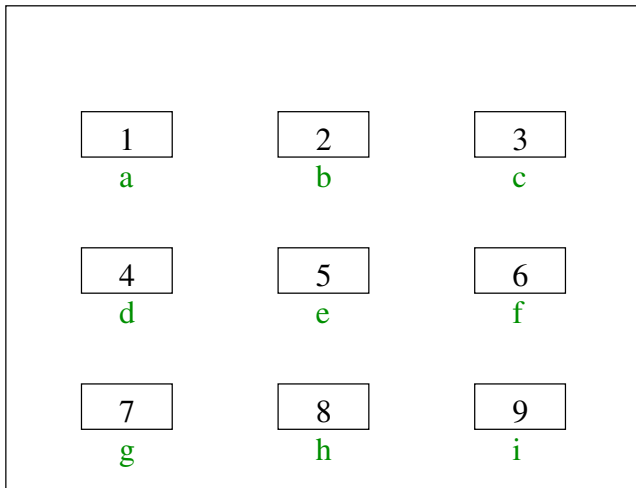
Mercredi : permutation $VV = V^2$



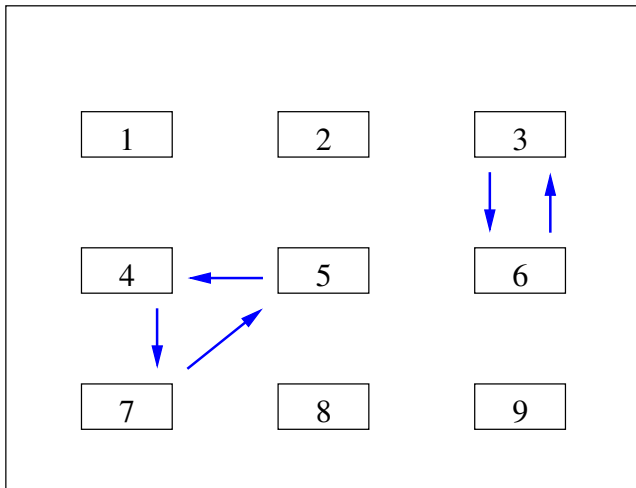
Jeudi : permutation V^3



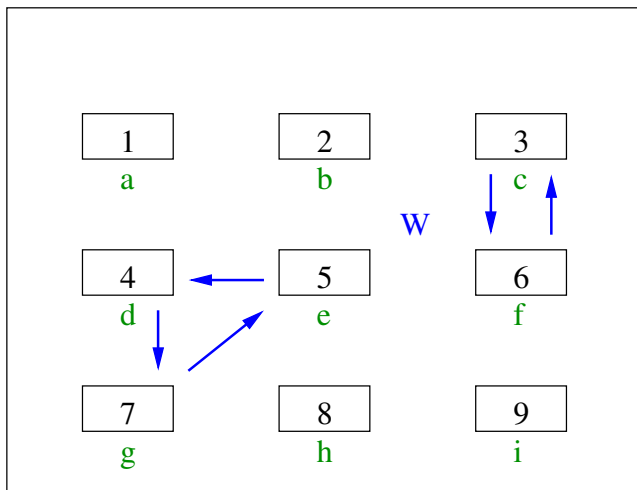
Vendredi : permutation $V^4 = I$



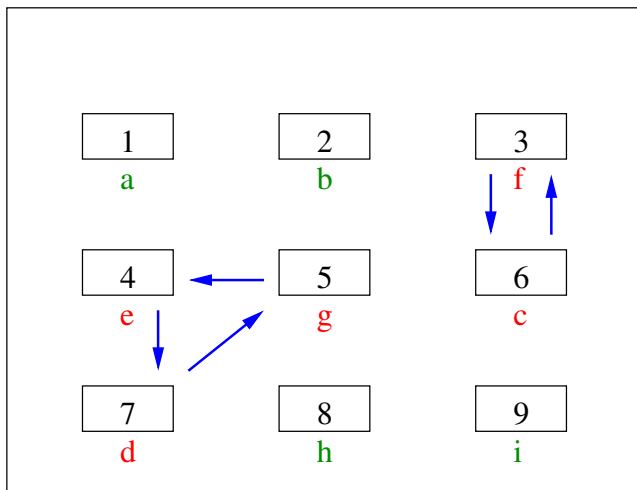
Permutation $W = (36)(475)$



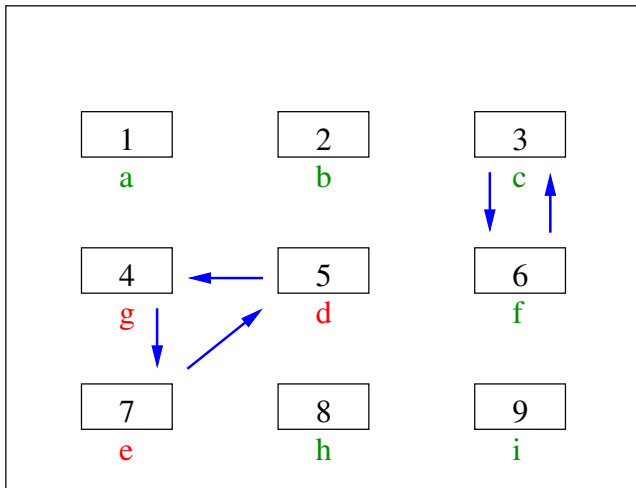
Lundi



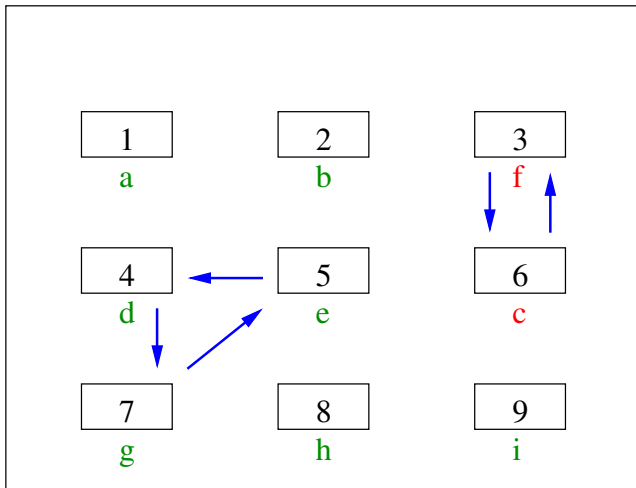
Mardi : permutation W



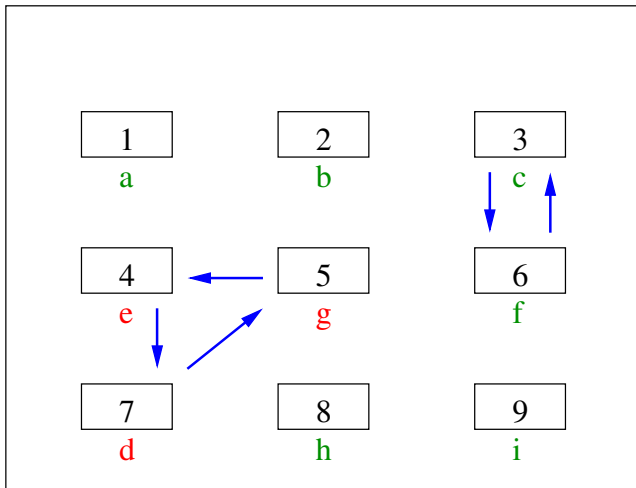
Mercredi : permutation W^2



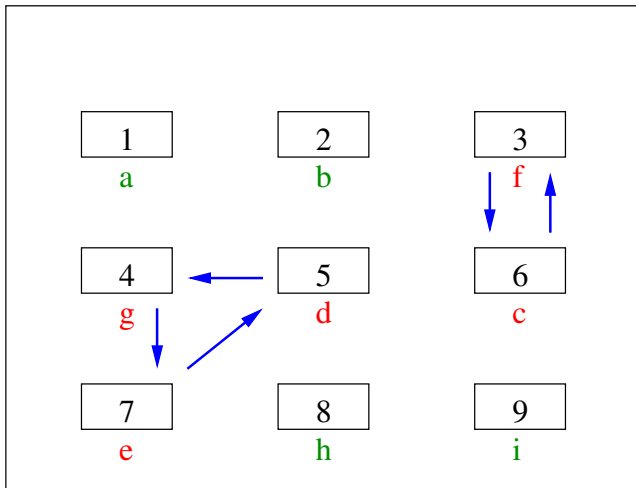
Jeudi : permutation W^3



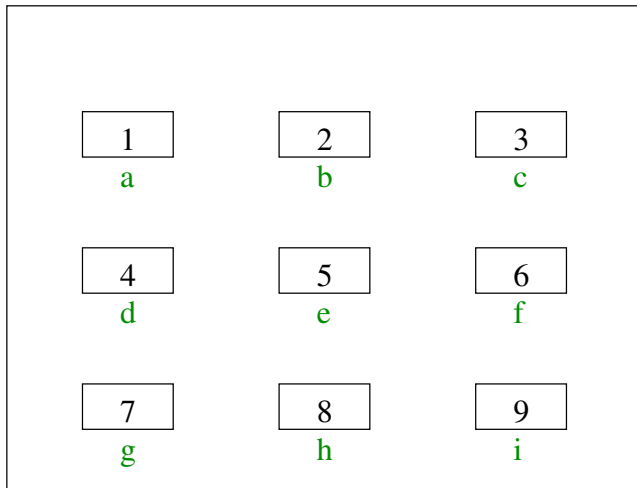
Vendredi : permutation W^4



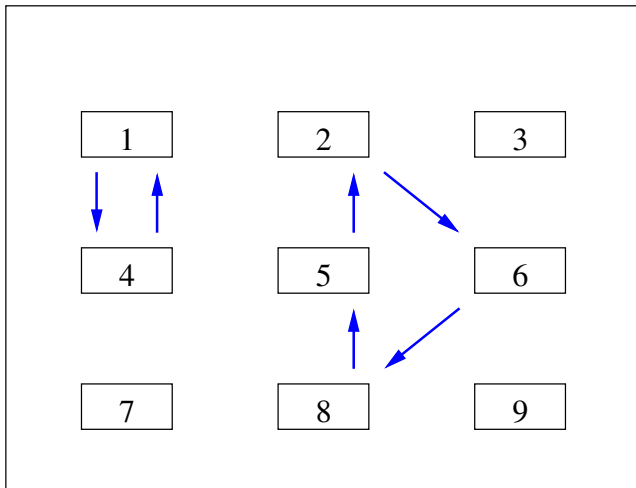
Samedi : permutation W^5



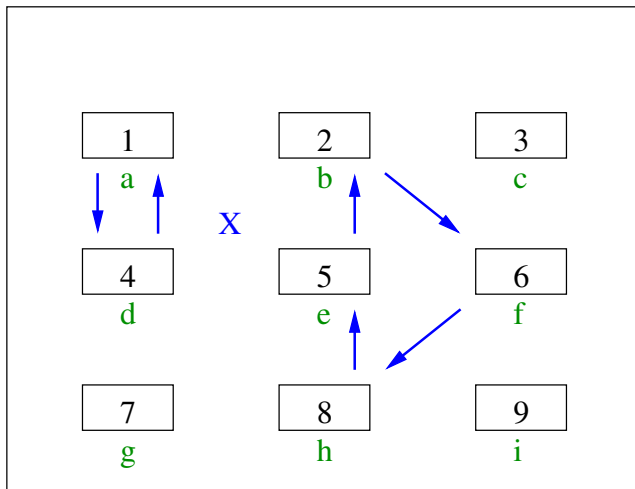
Dimanche : permutation $W^6 = I$



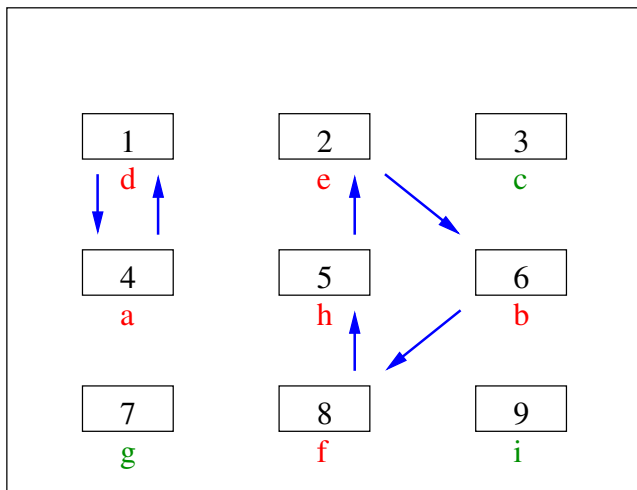
Permutation $X = (14)(2685)$



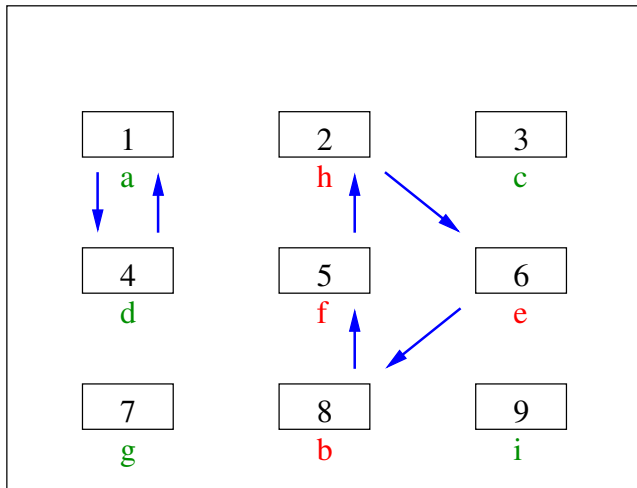
Lundi



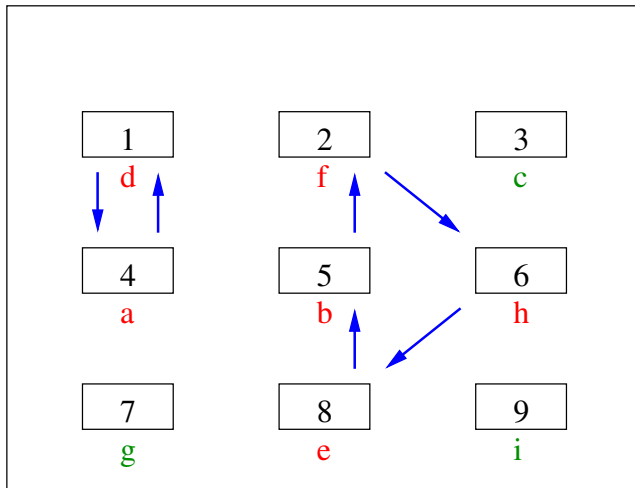
Mardi : permutation X



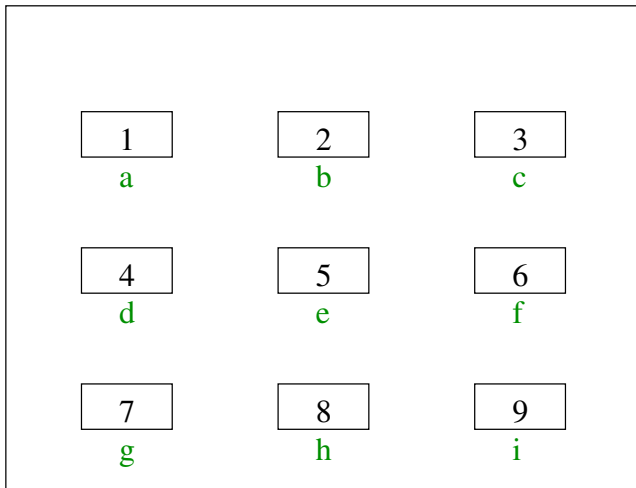
Mercredi : permutation X^2



Jeudi : permutation X^3



Vendredi : permutation $X^4 = I$



Ordre d'une permutation

Le nombre d'itérations pour revenir à l'état initial est appelé l'**ordre** de la permutation. On vient de voir que l'ordre de $\mathbf{V} = (2685)$ est 4, celui de $\mathbf{W} = (36)(475)$ est 6 et celui de $\mathbf{X} = (14)(2685)$ est 4.

Ordre d'une permutation

Le nombre d'itérations pour revenir à l'état initial est appelé l'**ordre** de la permutation. On vient de voir que l'ordre de $\mathbf{V} = (2685)$ est 4, celui de $\mathbf{W} = (36)(475)$ est 6 et celui de $\mathbf{X} = (14)(2685)$ est 4.

Plus généralement, lorsqu'une permutation est décrite sous forme de cycles disjoints, son ordre est le PPCM des longueurs des cycles.

Ordre d'une permutation

Le nombre d'itérations pour revenir à l'état initial est appelé l'**ordre** de la permutation. On vient de voir que l'ordre de $\mathbf{V} = (2685)$ est 4, celui de $\mathbf{W} = (36)(475)$ est 6 et celui de $\mathbf{X} = (14)(2685)$ est 4.

Plus généralement, lorsqu'une permutation est décrite sous forme de cycles disjoints, son ordre est le PPCM des longueurs des cycles.

Conséquences pour le cube :

- Lorsqu'on itère une formule, on finit par retomber sur la configuration initiale
- On peut trouver une formule qui est d'ordre

$$(3 \times 5 \times 3) \times (4 \times 7 \times 2) = 2520$$

Permutations composées

Composition des permutations

Le professeur décide de changer de permutation chaque jour.

- Si j'applique d'abord **W**, puis **X**, quel est le schéma résultant **WX** ?

Composition des permutations

Le professeur décide de changer de permutation chaque jour.

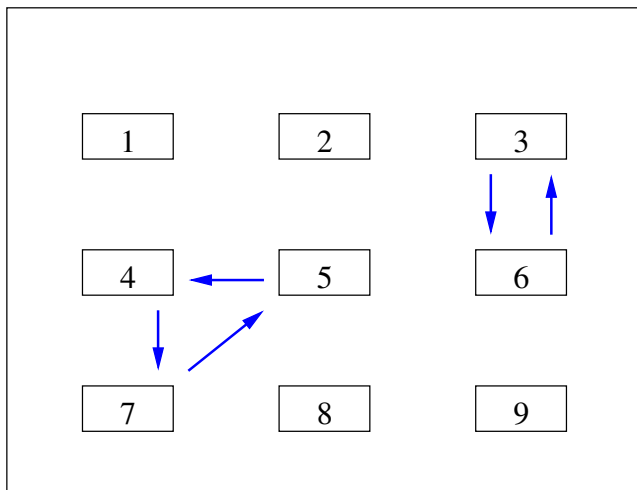
- Si j'applique d'abord $\mathbf{W}$, puis $\mathbf{X}$, quel est le schéma résultant $\mathbf{WX}$?
- Si j'applique d'abord $\mathbf{W}$, quelle permutation $\overline{\mathbf{W}}$ appliquer ensuite pour revenir à l'état initial ($\mathbf{W}\overline{\mathbf{W}} = \mathbf{I}$) ?

Composition des permutations

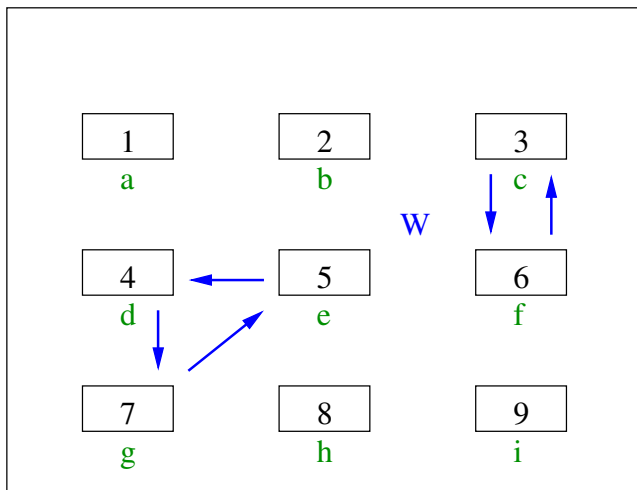
Le professeur décide de changer de permutation chaque jour.

- Si j'applique d'abord **W**, puis **X**, quel est le schéma résultant **WX** ?
- Si j'applique d'abord **W**, quelle permutation $\overline{W}$ appliquer ensuite pour revenir à l'état initial ($\overline{W}W = I$) ?
- Est-ce la même chose d'appliquer d'abord **W** puis **X** ou d'abord **X** puis **W** ?

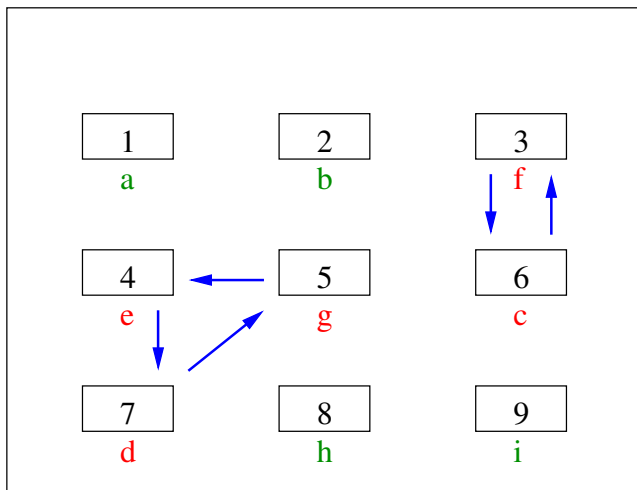
Permutation $W = (36)(475)$



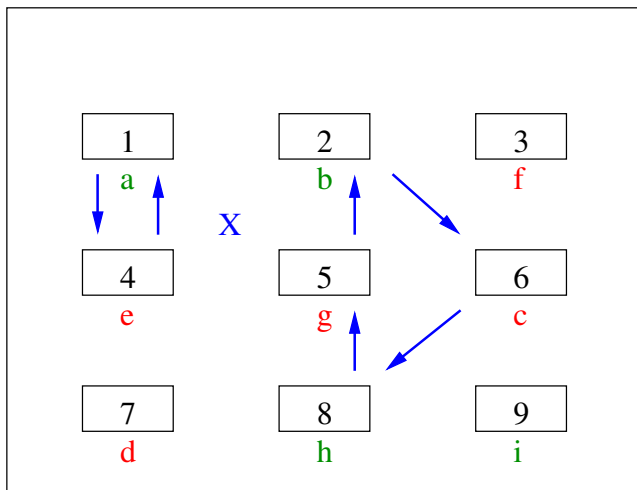
Lundi



Mardi : permutation **W**



Mardi : permutation W



Mercredi : permutation **WX**

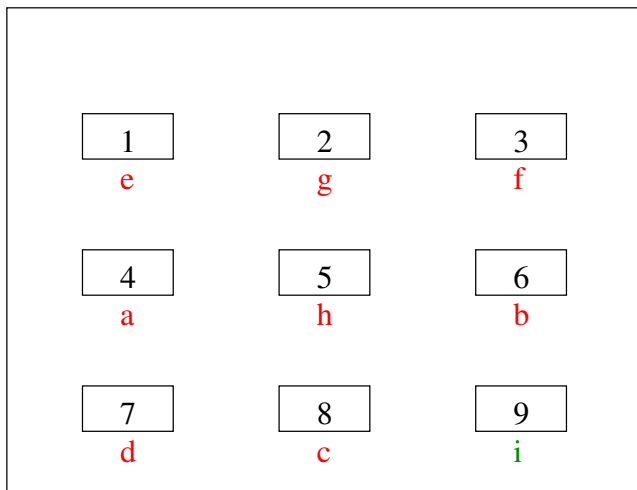


Schéma de la permutation **WX** ?

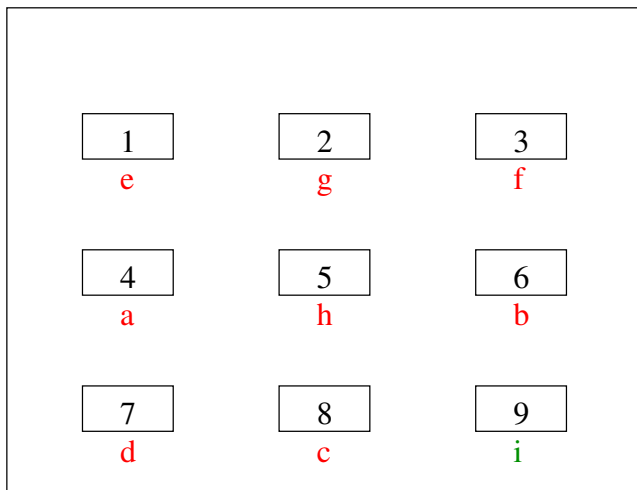


Schéma de la permutation **WX**

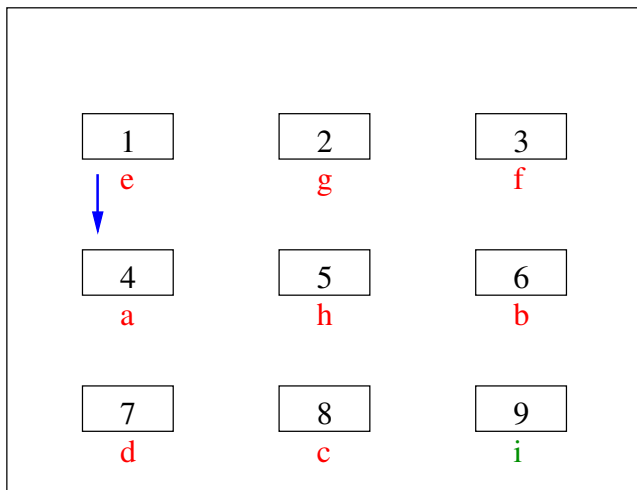


Schéma de la permutation **WX** ?

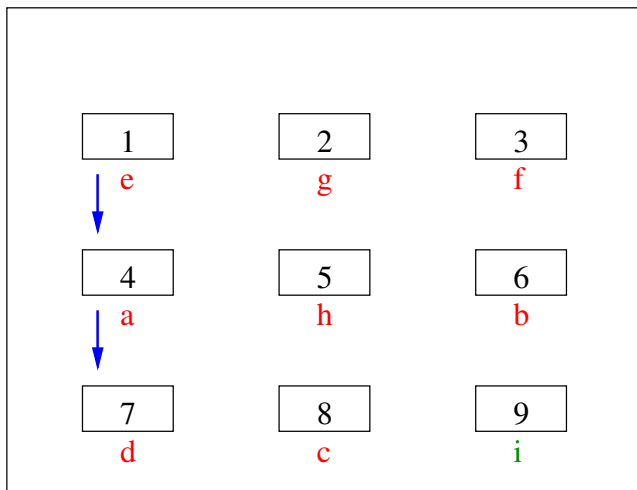


Schéma de la permutation **WX** ?

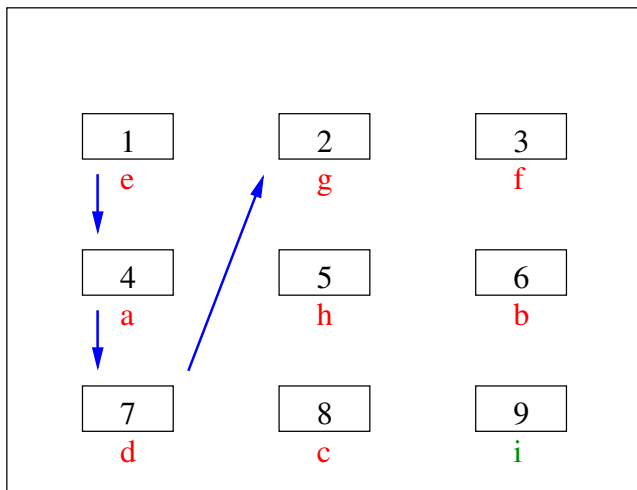


Schéma de la permutation **WX** ?

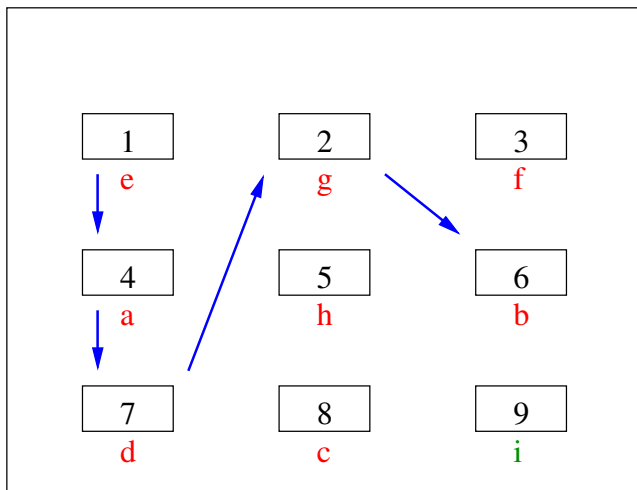


Schéma de la permutation **WX**

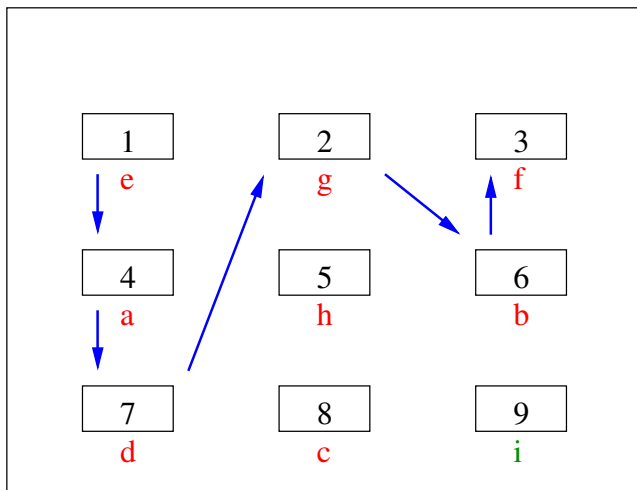


Schéma de la permutation **WX** ?

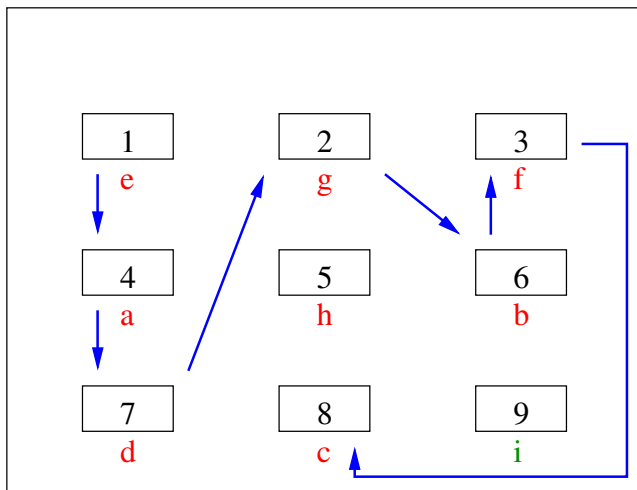
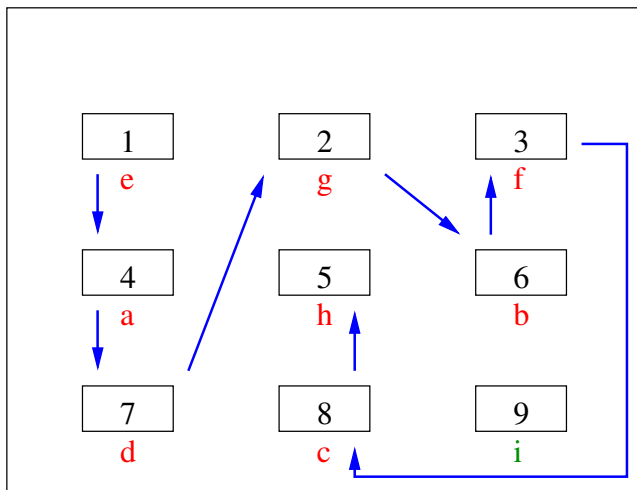
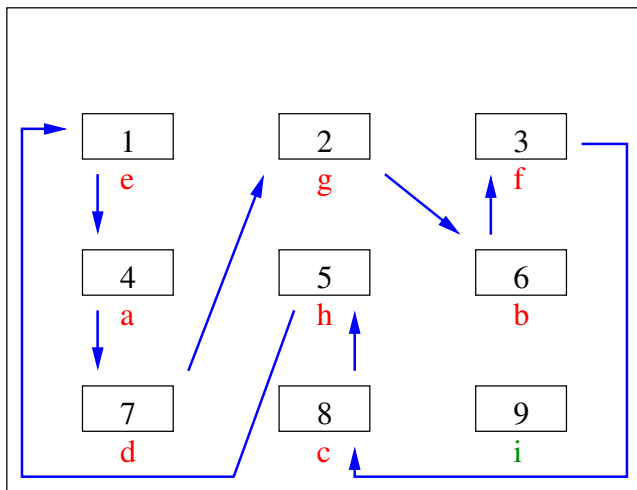
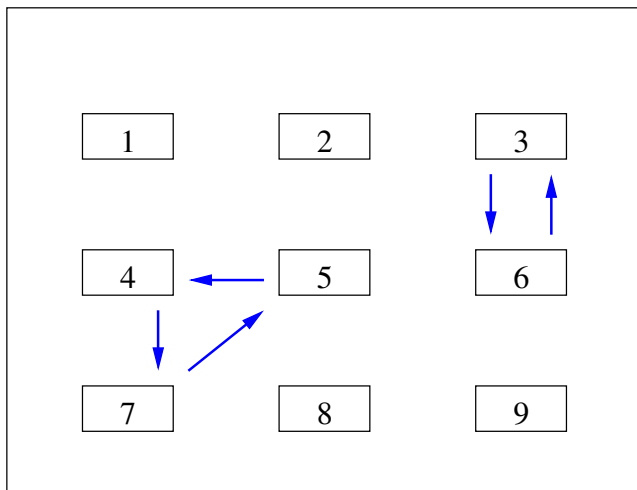


Schéma de la permutation **WX** ?

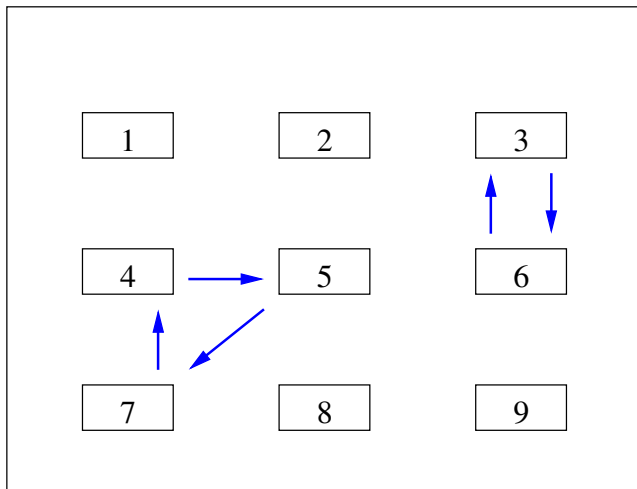


Permutation $WX = (14726385)$

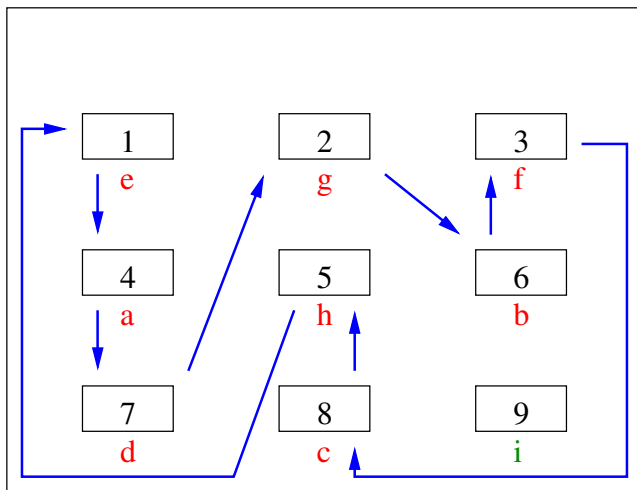


Inverse de $W = (36)(475)$?

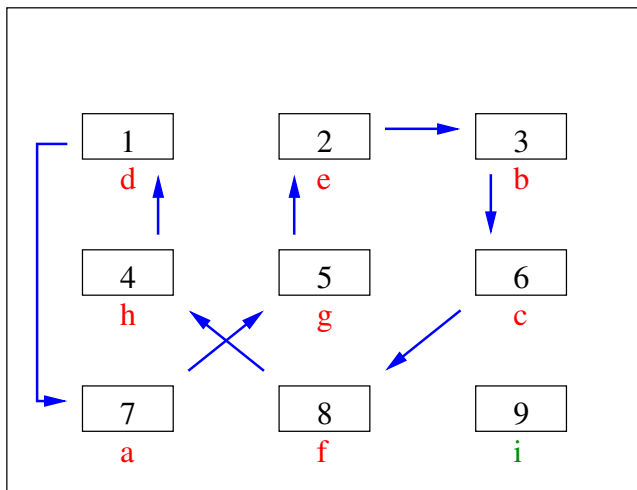
Permutation $\overline{W} = (63)(574) = (36)(457)$



Permutation $WX = (14726385)$



Permutation $XW = (17523684)$



Inverse d'un produit ?

Sur le cube de Rubik, si on tourne d'abord la face droite dans le sens de la montre puis la face du haut dans le sens inverse (c'est-à-dire $\mathbf{DH}$), quel est le mouvement inverse ?

Inverse d'un produit ?

Sur le cube de Rubik, si on tourne d'abord la face droite dans le sens de la montre puis la face du haut dans le sens inverse (c'est-à-dire $\overline{\mathbf{DH}}$), quel est le mouvement inverse ?

Réponse :

$$\overline{\overline{\mathbf{DH}}} = \overline{\overline{\mathbf{H}}} \overline{\overline{\mathbf{D}}} = \mathbf{HD}$$

Inverse d'un produit ?

Sur le cube de Rubik, si on tourne d'abord la face droite dans le sens de la montre puis la face du haut dans le sens inverse (c'est-à-dire $\overline{\mathbf{DH}}$), quel est le mouvement inverse ?

Réponse :

$$\overline{\overline{\mathbf{DH}}} = \overline{\overline{\mathbf{H}}} \overline{\overline{\mathbf{D}}} = \mathbf{HD}$$

Cela est un fait général pour deux permutations $\mathbf{S}$ et $\mathbf{T}$:

$$\overline{\overline{\mathbf{ST}}} = \overline{\overline{\mathbf{T}}} \overline{\overline{\mathbf{S}}}$$

Commutateurs et formules magiques

Peut-on avoir $ST = TS$?

Peut-on avoir $\mathbf{ST} = \mathbf{TS}$?

Oui, par exemple

- si $\mathbf{S} = \mathbf{I}$,

Peut-on avoir $\mathbf{ST} = \mathbf{TS}$?

Oui, par exemple

- si $\mathbf{S} = \mathbf{I}$, $\mathbf{T}$,

Peut-on avoir $\mathbf{ST} = \mathbf{TS}$?

Oui, par exemple

- si $\mathbf{S} = \mathbf{I}$, $\mathbf{T}$, $\overline{\mathbf{T}}$,

Peut-on avoir $\mathbf{ST} = \mathbf{TS}$?

Oui, par exemple

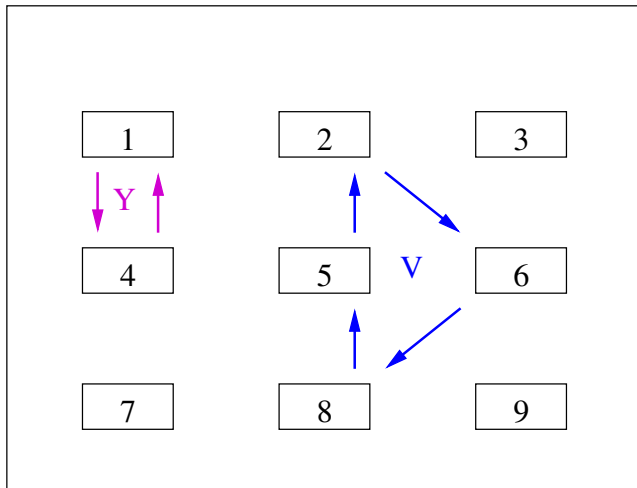
- si $\mathbf{S} = \mathbf{I}$, $\mathbf{T}$, $\bar{\mathbf{T}}$, $\mathbf{T}^2$...

Peut-on avoir $ST = TS$?

Oui, par exemple

- si $S = I, T, \bar{T}, T^2 \dots$
- si aucune table n'est touchée à la fois par S et T

V et **Y** = (14) commutent : **VY** = **YV**



Une mesure de la commutativité : le commutateur

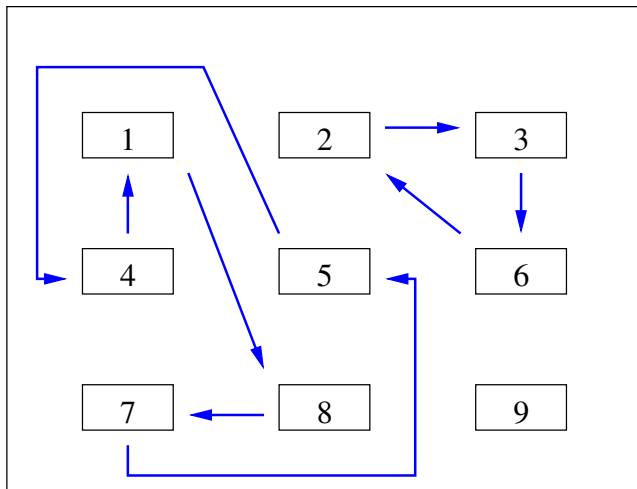
Remarquons que $\mathbf{ST} = \mathbf{TS}$ si et seulement si $\mathbf{STTS} = \mathbf{TSTS} = \mathbf{I}$ si et seulement si $\mathbf{ST\overline{S}\overline{T}} = \mathbf{I}$.

Définition :

$\mathbf{ST\overline{S}\overline{T}}$ est appelé le **commutateur** de $\mathbf{S}$ et $\mathbf{T}$. S'il ne bouge rien alors $\mathbf{S}$ et $\mathbf{T}$ commutent et réciproquement.

W et X ne commutent “vraiment pas”

$WX\overline{W}\overline{X} = (41875)(236)$ bouge “beaucoup” de choses !



Une idée fondamentale

On a vu :

Aucune table touchée à la fois par **S** et **T**
 $\implies \mathbf{ST\overline{S}\overline{T}}$ ne bouge rien.

Une idée fondamentale

On a vu :

Aucune table touchée à la fois par **S** et **T**
 $\implies \mathbf{ST\overline{S}\overline{T}}$ ne bouge rien.

On conjecture :

“Peu” de tables touchées à la fois par **S** et **T**
 $\implies \mathbf{ST\overline{S}\overline{T}}$ bouge “peu” de choses.

Une idée fondamentale

On a vu :

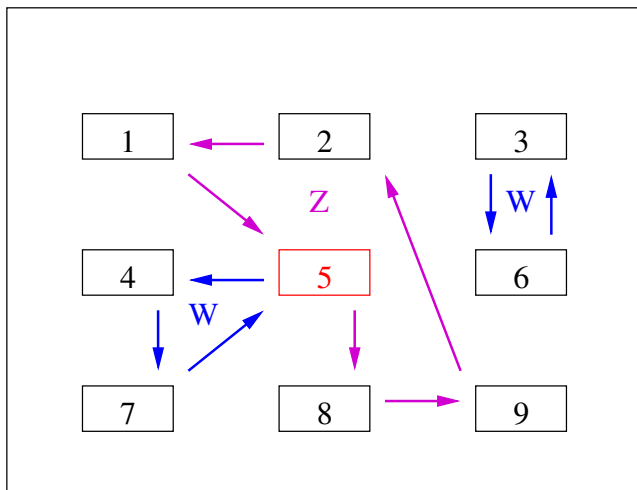
Aucune table touchée à la fois par **S** et **T**
 $\implies \mathbf{ST\bar{S}\bar{T}}$ ne bouge rien.

On conjecture :

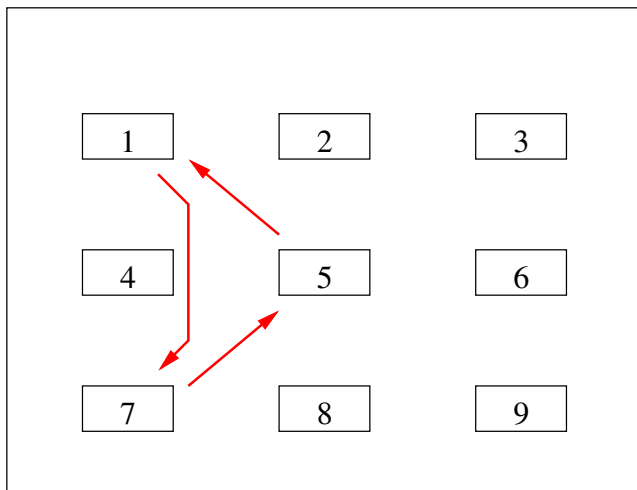
“Peu” de tables touchées à la fois par **S** et **T**
 $\implies \mathbf{ST\bar{S}\bar{T}}$ bouge “peu” de choses.

Essayons sur un exemple pour lequel il n’y a qu’une table touchée à la fois par **S** et **T**.

$$W = (36)(475) \text{ et } Z = (15892)$$



$WZ\bar{W}\bar{Z} = (175)$ bouge “peu” !



Théorème

S'il y a une seule table touchée à la fois par **S** et **T**, alors **$ST\overline{S}\overline{T}$** est une permutation circulaire de trois objets.

Placement des cubes sommets

Placement des cubes sommets

On cherche à construire une suite de mouvements du cube dont le seul effet est une permutation circulaire de trois sommets.

Placement des cubes sommets

On cherche à construire une suite de mouvements du cube dont le seul effet est une permutation circulaire de trois sommets.

Pour cela, en vertu de ce qui précède, il suffit de trouver deux séquences de mouvements **S** et **T** telles que seul un cube sommet est bougé par les deux séquences (et aucun cube arête ne l'est).

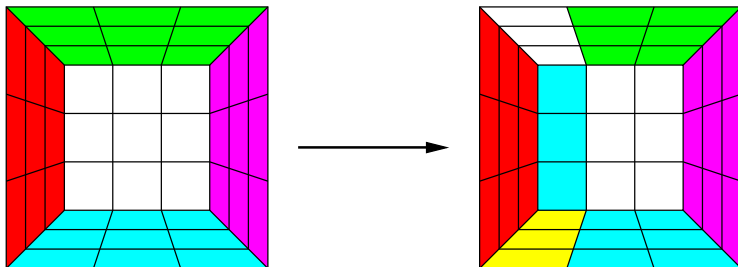
Placement des cubes sommets

On cherche à construire une suite de mouvements du cube dont le seul effet est une permutation circulaire de trois sommets.

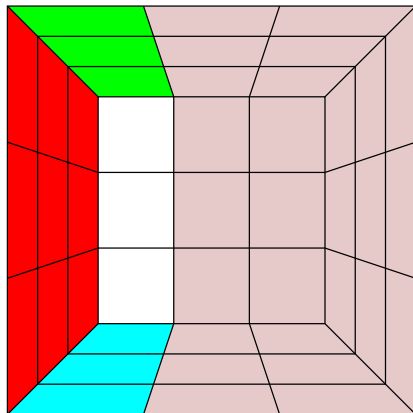
Pour cela, en vertu de ce qui précède, il suffit de trouver deux séquences de mouvements **S** et **T** telles que seul un cube sommet est bougé par les deux séquences (et aucun cube arête ne l'est).

On choisit arbitrairement **S** = $\overline{\mathbf{G}}$, rotation d'un quart de tour de la face gauche dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

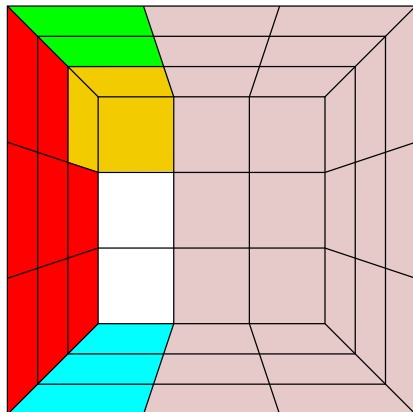
Mouvement $\overline{G}$



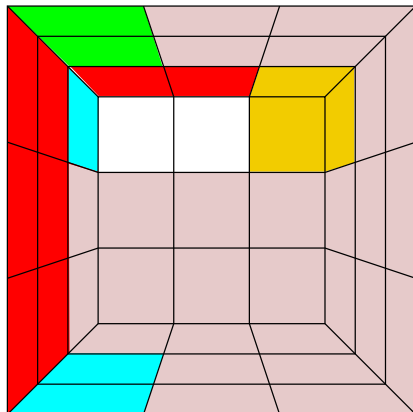
Recherche de T



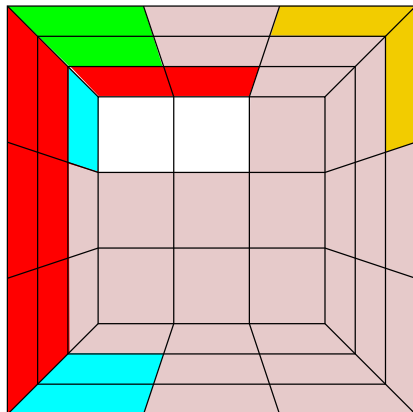
Recherche de T



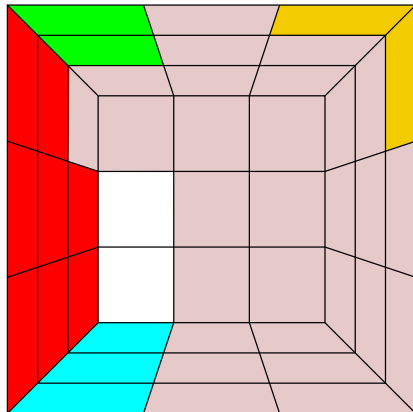
T = A...



$$T = AD \dots$$



$T = AD\bar{A}$ convient !

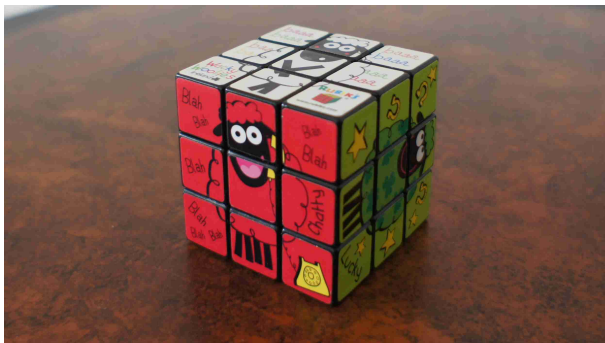


On retrouve la formule donnée au début

$\overline{GAD\overline{A}GAD\overline{A}}$

Orientation des cubes sommets

$\overline{G}A\overline{D}\overline{A}G\overline{A}\overline{D}\overline{A}\overline{H}\overline{D}\overline{H}\overline{G}\overline{H}\overline{D}\overline{H}\overline{G}$



Cubes arêtes



Conjugaison et pratique

La conjugaison

La conjugaison

Et si les cubes qu'on veut permuter ou orienter ne sont pas dans la configuration de départ pour une formule magique **S** (par exemple trois CS non dans une même face) ?

La conjugaison

Et si les cubes qu'on veut permuter ou orienter ne sont pas dans la configuration de départ pour une formule magique **S** (par exemple trois CS non dans une même face) ?

On s'en tire en construisant la bonne configuration de départ par une manipulation **T** (par exemple qui place les trois CS dans une même face). On applique alors **S** et il convient ensuite de tout remettre en place par $\overline{\mathbf{T}}$.

La conjugaison

Et si les cubes qu'on veut permuter ou orienter ne sont pas dans la configuration de départ pour une formule magique **S** (par exemple trois CS non dans une même face) ?

On s'en tire en construisant la bonne configuration de départ par une manipulation **T** (par exemple qui place les trois CS dans une même face). On applique alors **S** et il convient ensuite de tout remettre en place par $\bar{T}$.

La formule totale est alors la **conjugaison** de **S** par **T** : **$TST\bar{T}$** .

Plus de formules

Plus de formules

Il est plus efficace de placer au début le plus de choses possible “à la main”, par exemple de placer directement bien orientés les CA d’une face, puis ses CS.

Plus de formules

Il est plus efficace de placer au début le plus de choses possible “à la main”, par exemple de placer directement bien orientés les CA d’une face, puis ses CS.

Ensuite, il est possible de placer et d’orienter en même temps, voire de placer et orienter plusieurs item en même temps. Il est nécessaire pour cela de connaître beaucoup de formules (plus d’une centaine pour les champions...)

Plus de formules

Il est plus efficace de placer au début le plus de choses possible “à la main”, par exemple de placer directement bien orientés les CA d’une face, puis ses CS.

Ensuite, il est possible de placer et d’orienter en même temps, voire de placer et orienter plusieurs item en même temps. Il est nécessaire pour cela de connaître beaucoup de formules (plus d’une centaine pour les champions...)

- www.francocube.com
- “Speedsolving the cube” par Dan Harris

Autres questions mathématiques

- Combien de remontages physiques (configurations illégales) ?

- Combien de remontages physiques (configurations illégales) ? Réponse : $8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12} \simeq 5,2 \cdot 10^{20}$

- Combien de remontages physiques (configurations illégales) ? Réponse : $8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12} \simeq 5,2 \cdot 10^{20}$
- Si je le remonte au hasard, puis-je le refaire légalement ? Avec quelle probabilité ?

- Combien de remontages physiques (configurations illégales) ? Réponse : $8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12} \simeq 5,2 \cdot 10^{20}$
- Si je le remonte au hasard, puis-je le refaire légalement ? Avec quelle probabilité ? (Quelles sont les configurations légales ? Combien y en a-t-il ?)

- Combien de remontages physiques (configurations illégales) ? Réponse : $8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12} \simeq 5,2 \cdot 10^{20}$
- Si je le remonte au hasard, puis-je le refaire légalement ? Avec quelle probabilité ? (Quelles sont les configurations légales ? Combien y en a-t-il ?)
- Structure de groupe ?

- Combien de remontages physiques (configurations illégales) ? Réponse : $8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12} \simeq 5,2 \cdot 10^{20}$
- Si je le remonte au hasard, puis-je le refaire légalement ? Avec quelle probabilité ? (Quelles sont les configurations légales ? Combien y en a-t-il ?)
- Structure de groupe ?
- Nombre de dieu du cube ?

Rappel des quatre formules

- Placement des CS (3-cycle)
- Orientation des CS (tourne deux CS dans des sens opposés)
- Placement des CA (3-cycle)
- Orientation des CA (retourne simultanément deux CA)

Expérience de pensée

Expérience de pensée

Les 3-cycles engendrent les permutations paires. Quitte à faire un quart de tour (4-cycle sur les CS donc impair), on peut donc placer les CS où on veut.

Expérience de pensée

Les 3-cycles engendrent les permutations paires. Quitte à faire un quart de tour (4-cycle sur les CS donc impair), on peut donc placer les CS où on veut.

Par notre formule d'orientation, on peut tous les orienter arbitrairement sauf le dernier.

Expérience de pensée

Les 3-cycles engendrent les permutations paires. Quitte à faire un quart de tour (4-cycle sur les CS donc impair), on peut donc placer les CS où on veut.

Par notre formule d'orientation, on peut tous les orienter arbitrairement sauf le dernier.

Ensuite, si on veut conserver ces CS intacts, on peut faire des 3-cycles sur les CA et donc les mettre où on veut sauf les deux derniers qu'on ne peut pas échanger.

Expérience de pensée

Les 3-cycles engendrent les permutations paires. Quitte à faire un quart de tour (4-cycle sur les CS donc impair), on peut donc placer les CS où on veut.

Par notre formule d'orientation, on peut tous les orienter arbitrairement sauf le dernier.

Ensuite, si on veut conserver ces CS intacts, on peut faire des 3-cycles sur les CA et donc les mettre où on veut sauf les deux derniers qu'on ne peut pas échanger.

On peut alors orienter arbitrairement tous les CA sauf le dernier.

On peut donc obtenir toutes les configurations à orientation d'un CS, permutation de deux CA et orientation d'un CA près.

On peut donc obtenir toutes les configurations à orientation d'un CS, permutation de deux CA et orientation d'un CA près.

On obtient ainsi **un douzième** des configurations illégales !

On peut donc obtenir toutes les configurations à orientation d'un CS, permutation de deux CA et orientation d'un CA près.

On obtient ainsi **un douzième** des configurations illégales !

Théorème : il n'y a pas d'autres configurations légales.

On peut donc obtenir toutes les configurations à orientation d'un CS, permutation de deux CA et orientation d'un CA près.

On obtient ainsi **un douzième** des configurations illégales !

Théorème : il n'y a pas d'autres configurations légales.

Preuve empirique : manipuler le cube.

On peut donc obtenir toutes les configurations à orientation d'un CS, permutation de deux CA et orientation d'un CA près.

On obtient ainsi **un douzième** des configurations illégales !

Théorème : il n'y a pas d'autres configurations légales.

Preuve empirique : manipuler le cube.

Sinon, on prouve ce résultat en trois étapes...

Impossibilité d'orienter un seul CA

Impossibilité d'orienter un seul CA

Un quart de tour agit comme un produit de deux 4-cycles sur les facettes des CA, qui a une signature positive. On ne pourra donc jamais produire des transpositions.

Impossibilité d'orienter un seul CS

Impossibilité d'orienter un seul CS

Dans la configuration initiale, on fait des croix sur les facettes des CS situées sur les faces du haut et du bas.

Impossibilité d'orienter un seul CS

Dans la configuration initiale, on fait des croix sur les facettes des CS situées sur les faces du haut et du bas. Pour une configuration quelconque, on compte, pour chaque CS,

Impossibilité d'orienter un seul CS

Dans la configuration initiale, on fait des croix sur les facettes des CS situées sur les faces du haut et du bas. Pour une configuration quelconque, on compte, pour chaque CS,

- 0 si la croix est sur la face du haut ou du bas

Impossibilité d'orienter un seul CS

Dans la configuration initiale, on fait des croix sur les facettes des CS situées sur les faces du haut et du bas. Pour une configuration quelconque, on compte, pour chaque CS,

- 0 si la croix est sur la face du haut ou du bas
- +1 s'il faut tourner le CS dans le sens de la montre pour amener la croix en haut ou en bas

Impossibilité d'orienter un seul CS

Dans la configuration initiale, on fait des croix sur les facettes des CS situées sur les faces du haut et du bas. Pour une configuration quelconque, on compte, pour chaque CS,

- 0 si la croix est sur la face du haut ou du bas
- +1 s'il faut tourner le CS dans le sens de la montre pour amener la croix en haut ou en bas
- -1 sinon

Impossibilité d'orienter un seul CS

Dans la configuration initiale, on fait des croix sur les facettes des CS situées sur les faces du haut et du bas. Pour une configuration quelconque, on compte, pour chaque CS,

- 0 si la croix est sur la face du haut ou du bas
- +1 s'il faut tourner le CS dans le sens de la montre pour amener la croix en haut ou en bas
- -1 sinon

et on fait la somme $\sum$.

Impossibilité d'orienter un seul CS

Dans la configuration initiale, on fait des croix sur les facettes des CS situées sur les faces du haut et du bas. Pour une configuration quelconque, on compte, pour chaque CS,

- 0 si la croix est sur la face du haut ou du bas
- +1 s'il faut tourner le CS dans le sens de la montre pour amener la croix en haut ou en bas
- -1 sinon

et on fait la somme Σ .

Σ est invariante par quart de tour, donc toujours nulle.

Impossibilité d'orienter un seul CS

Dans la configuration initiale, on fait des croix sur les facettes des CS situées sur les faces du haut et du bas. Pour une configuration quelconque, on compte, pour chaque CS,

- 0 si la croix est sur la face du haut ou du bas
- +1 s'il faut tourner le CS dans le sens de la montre pour amener la croix en haut ou en bas
- -1 sinon

et on fait la somme Σ .

Σ est invariante par quart de tour, donc toujours nulle.

Il est donc impossible d'orienter un CA tout seul !

Impossibilité d'échanger deux CA sans bouger les CS (et *vice-versa*)

Impossibilité d'échanger deux CA sans bouger les CS (et *vice-versa*)

Un quart de tour agit comme un 4-cycle sur les CS et un 4-cycle sur les CA.

Impossibilité d'échanger deux CA sans bouger les CS (et *vice-versa*)

Un quart de tour agit comme un 4-cycle sur les CS et un 4-cycle sur les CA.

Dans une manipulation, le produit de la signature de la permutation des CS et de la permutation des CA vaut donc toujours 1.

Impossibilité d'échanger deux CA sans bouger les CS (et *vice-versa*)

Un quart de tour agit comme un 4-cycle sur les CS et un 4-cycle sur les CA.

Dans une manipulation, le produit de la signature de la permutation des CS et de la permutation des CA vaut donc toujours 1.

Ainsi, si la permutation des CS est paire (par exemple les CS sont bien placés), alors celle des CA aussi et donc la transposition de deux CA est impossible.

Nombre de configurations légales

Nombre de configurations légales

C'est donc exactement un douzième du nombre de configurations illégales soit

$$(8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12})/12 \simeq 4,3 \cdot 10^{19}$$

Nombre de Dieu

Nombre de Dieu

La distance entre deux configurations est le nombre minimum de quarts de tours ou demi-tours nécessaire pour passer de l'une à l'autre.

Nombre de Dieu

La distance entre deux configurations est le nombre minimum de quarts de tours ou demi-tours nécessaire pour passer de l'une à l'autre.

Le nombre de Dieu N est la distance maximum d'une configuration légale à la configuration initiale.

Nombre de Dieu

La distance entre deux configurations est le nombre minimum de quarts de tours ou demi-tours nécessaire pour passer de l'une à l'autre.

Le nombre de Dieu N est la distance maximum d'une configuration légale à la configuration initiale.

Il était connu depuis une vingtaine d'années que la distance du superflip à la configuration initiale est 20, que $N \leq 23$, et conjecturé que $N = 22$ ou 23.

En 2010, il a été montré que $N = 20$ par une équipe de trois personnes : un mathématicien, un informaticien et un ingénieur.

En 2010, il a été montré que $N = 20$ par une équipe de trois personnes : un mathématicien, un informaticien et un ingénieur.

La démonstration a nécessité une réduction du nombre de cas utilisant fortement la théorie de groupes, des algorithmes sophistiqués et un traitement en parallèle utilisant un grand nombre d'ordinateurs.

Structures de groupe

Soient $\tilde{R}$ le groupe illégal du cube et R son groupe légal.

Structures de groupe

Soient $\tilde{R}$ le groupe illégal du cube et R son groupe légal.

$$R < \tilde{R} < \mathcal{S}(\{ \text{facettes} \})$$

Structures de groupe

Soient $\tilde{R}$ le groupe illégal du cube et R son groupe légal.

$$R < \tilde{R} < \mathcal{S}(\{\text{facettes}\})$$

$$\tilde{R} = \tilde{R}_A \times \tilde{R}_S \simeq (\mathcal{S}_{12} \ltimes (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{12}) \times (\mathcal{S}_8 \ltimes (\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})^8)$$

Structures de groupe

Soient $\tilde{R}$ le groupe illégal du cube et R son groupe légal.

$$R < \tilde{R} < \mathcal{S}(\{\text{facettes}\})$$

$$\tilde{R} = \tilde{R}_A \times \tilde{R}_S \simeq (\mathcal{S}_{12} \ltimes (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{12}) \times (\mathcal{S}_8 \ltimes (\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})^8)$$

R est isomorphe à un sous-groupe d'indice 2 de

$$(\mathcal{S}_{12} \ltimes (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{11}) \times (\mathcal{S}_8 \ltimes (\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})^7)$$

Sous-groupes

Sous-groupes

Le **superflip** est la figure obtenue en retournant tous les CA. Le centre de R est réduit à l'identité et au superflip.

Sous-groupes

Le **superflip** est la figure obtenue en retournant tous les CA. Le centre de R est réduit à l'identité et au superflip. On peut retrouver dans R beaucoup de groupes finis intéressants (voir par exemple “Notes on Rubik’s magic cube” de D. Singmaster).