

# Nombres complexes et trigonométrie

Lycée Berthollet, MPSI2 2024-25

## I Introduction

Deux points de vue sur la construction des nombres complexes : résoudre l'équation  $x^2 = -1$  d'une part et trouver une multiplication sur  $(\mathbb{R}^2, +)$  qui en fasse un corps d'autre part.

## II Une piste pour construire $\mathbb{C}$

On passe en revue les propriétés de l'addition et la multiplication sur  $\mathbb{R}$  (on dit que cela en fait un "corps"). On remarque que l'addition ("vectorielle") sur  $\mathbb{R}^2$  vérifie les mêmes propriétés que celle de  $\mathbb{R}$  (associativité, commutativité, existence d'un élément neutre  $(0,0)$ , existence, pour tout  $(x,y)$ , d'un opposé  $(-x,-y)$ ) et on questionne l'existence d'une multiplication qui fasse de  $\mathbb{R}^2$  un corps, (*i.e.* vérifiant associativité, commutativité, existence d'un élément neutre (différent de celui de l'addition), existence de l'inverse d'un couple non nul, distributivité par rapport à l'addition).

Les élèves connaissant déjà  $\mathbb{C}$  proposent une formule. On admet que toutes les propriétés de corps sont vérifiées en montrant quelques unes oralement et en laissant les autres en exercice.

En identifiant  $\mathbb{R} \times \{0\}$  à  $\mathbb{R}$  et définissant  $i$  comme  $(0,1)$ , on obtient la notation algébrique et les règles de calcul habituelles et on note ce corps  $\mathbb{C}$ .

Exemple de calcul.

## III Parties réelle et imaginaire

Définition, notation  $\operatorname{Re}(z)$  et  $\operatorname{Im}(z)$ ,  $\mathbb{R}$ -linéarité de  $\operatorname{Re}$  et  $\operatorname{Im}$ , parties réelle et imaginaire d'un produit de complexes.

Conjugaison,  $\bar{\bar{z}} = z$ , caractérisation des réels et des imaginaires purs à l'aide de la conjugaison, compatibilité de la conjugaison avec les opérations  $+$  et  $\times$ ,

Lien entre conjugaison et parties réelle et imaginaire :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \begin{cases} z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z) \\ z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z) \end{cases} \quad i.e. \quad \begin{cases} \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \\ \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i} \end{cases}$$

Représentation géométrique des nombres complexes, notion d'affixe d'un point ou d'un vecteur, interprétation géométrique de la conjugaison.

## IV Module

Définition et interprétation géométrique. Premières propriétés : coïncidence avec la valeur absolue sur l'axe réel; module de l'opposé, du conjugué; expression du carré du module à l'aide du conjugué. Application au calcul pratique des quotients. Autres propriétés : comparaison du module à la valeur absolue de la partie réelle (resp. imaginaire), cas d'égalité; module d'un produit, d'un inverse, d'un quotient; le module d'un complexe est nul ssi ce complexe est nul; inégalité triangulaire, cas d'égalité en termes vectoriels (nombres complexes "positivement liés") et algébriques ( $zz' \in \mathbb{R}_+$ ), seconde inégalité triangulaire. Représentation complexe des cercles et disques.

**Démonstration de l'inégalité triangulaire :** Soient  $z, z' \in \mathbb{C}$ . On a

$$\begin{aligned} |z + z'|^2 &= (z + z') \overline{(z + z')} \\ &= (z + z') (\bar{z} + \bar{z}') \\ &= z\bar{z} + z\bar{z}' + z'\bar{z} + z'\bar{z}' \\ &= z\bar{z} + z\bar{z}' + \overline{z\bar{z}'} + z'\bar{z}' \\ &= |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{z}') + |z'|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|\operatorname{Re}(z\bar{z}')| + |z'|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z\bar{z}'| + |z'|^2 \\ &= |z|^2 + 2|z||\bar{z}'| + |z'|^2 \\ &= |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2 \\ &= (|z| + |z'|)^2. \end{aligned}$$

Comme la fonction racine carrée est croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , puis  $|z + z'| \geq 0$  et  $|z| + |z'| \geq 0$ , on obtient  $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ .

**Caractérisation algébrique du cas d'égalité :** dans l'inégalité triangulaire ci-dessus, il y a égalité ss'il y a égalité dans les deux inégalités de la démonstration :  $\operatorname{Re}(z\bar{z}') = |\operatorname{Re}(z\bar{z}')|$  et  $|\operatorname{Re}(z\bar{z}')| = |z\bar{z}'|$ . Cela équivaut donc à ce que  $\operatorname{Re}(z\bar{z}') \geq 0$  et  $z\bar{z}' \in \mathbb{R}$ , i.e.  $z\bar{z}' \in \mathbb{R}_+$ .

## V Nombres complexes de module 1 et trigonométrie

### 1 Cercle trigonométrique

Cercle trigonométrique et ensemble  $\mathbb{U}$  des nombres complexes de module 1. Définition et étude rapide de la fonction tan. Savoir retrouver les périodicités et symétries des fonctions trigonométriques, Valeurs remarquables des fonctions trigonométriques. Résolution des équations et inéquations trigonométriques de base ( $\cos x = a$ ,  $\sin x \leq b$ , etc.) à l'aide du cercle trigonométrique. À cette occasion, condition d'égalité de deux cosinus, de deux sinus, de deux tangentes et définition des nombres  $\operatorname{Arccos}(a)$ ,  $\operatorname{Arcsin}(b)$  et  $\operatorname{Arctan}(c)$ , sans parler des fonctions.

### 2 Formules trigonométriques

Démonstration des formules d'addition pour cos et sin. On en déduit les symétries déjà vues sur le cercle, les formules de soustraction, celle de l'arc double, les formules pour les produits

$\cos a \cos b$ , etc., celles pour les sommes  $\cos p + \cos q$ , etc. (ces dernières ne sont pas exigibles par cœur mais l'étudiant doit savoir les retrouver), la formule d'addition pour la tangente.

## VI Exponentielle d'un imaginaire pur

Définition de  $\exp(i\theta)$ , formule d'addition, notation  $e^{i\theta}$ , formules d'Euler (aussi expression de la tangente), formule de Moivre. Application à la linéarisation. Application de la formule de la tangente en fonction de l'exponentielle complexe (laissée en exercice) : expression des fonctions trigonométriques en  $x$  comme fractions rationnelles en  $\tan \frac{x}{2}$ . Application de la formule de Moivre au calcul des expressions de  $\cos(nt)$ ,  $\sin(nt)$  et  $\tan(nt)$  en fonction de  $\cos t$  et  $\sin t$ . Factorisation de  $1 \pm e^{i\theta}$ ,  $e^{ia} \pm e^{ib}$ , application : retrouver les formules des cosinus et sinus de l'arc double et les expressions factorisées de  $\cos p + \cos q$ . Calculs des sommes  $\sum_{k=0}^n e^{ikt}$ ,  $\sum_{k=0}^n \cos(kt)$ ,  $\sum_{k=0}^n \sin(kt)$ .

## VII Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Pour  $z \neq 0$ , l'ensemble des  $\theta$  tels que  $z = |z|e^{i\theta}$  est de la forme  $\theta_0 + 2\pi\mathbb{Z}$ ;  $\text{Arg}(z)$  désigne l'un des éléments de cet ensemble, qu'on ne connaît donc que modulo  $2\pi$ . À cette occasion introduction de la définition de la congruence de deux réels modulo  $2\pi$ . Tous les calculs sur les arguments se feront donc modulo  $2\pi$ . Propriétés : caractérisation de  $\mathbb{R}_+^*$ ,  $\mathbb{R}_-^*$ ,  $i\mathbb{R}_+^*$  et  $i\mathbb{R}_-^*$ ; argument de l'opposé, du conjugué, de l'inverse, d'un produit, d'un quotient; CNS d'égalité de deux complexes en fonction de leurs modules et arguments.

Calcul pratique de l'argument d'un nombre complexe sous forme algébrique, module et argument d'une somme (ou différence) de nombres complexes de module 1 sous forme trigonométrique. Interprétation géométrique dans le cas  $1 \pm e^{i\theta}$  (cas particulier du théorème de l'angle au centre).

Application à la physique : une somme de signaux sinusoïdaux de même fréquence est encore un signal sinusoïdal (expression de  $a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$  sous la forme  $A \cos(\omega t + \varphi)$ , calcul de  $A$  et  $\varphi$  par la trigonométrie ou les exponentielles complexes).

## VIII Équations du second degré

Cas particulier de l'extraction de racine carrée : preuve de l'existence sous la forme trigonométrique, calcul pratique quand le nombre est sous forme algébrique, cas général des équations du second degré : théorème, résolution pratique. Somme et produit des racines en fonction des coefficients, savoir trouver deux complexes connaissant leur somme et leur produit.

## IX Racines $n$ -ièmes

Proposition décrivant les racines  $n$ -ièmes de 1 puis d'un complexe quelconque. Résultat sur la somme des racines  $n$ -ièmes de 1.

# X Exponentielle complexe

On définit ici l'exponentielle d'un nombre complexe quelconque de manière cohérente avec les cas particuliers connus des nombres réels et imaginaires purs.

**Définition 1** On définit la fonction *exponentielle de variable complexe et à valeurs complexes* par

$$\exp : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \exp(z) = e^{\operatorname{Re}(z)} e^{i\operatorname{Im}(z)} \end{cases} .$$

*Remarque 2* Cette fonction est bien définie sur  $\mathbb{C}$  car on a défini précédemment chacun des termes du produit : l'exponentielle d'un réel vue au lycée et l'exponentielle d'un imaginaire pur vue plus haut dans ce chapitre. Par ailleurs, elle *prolonge* ces deux définitions de manière cohérente, puisque  $e^0 = 1$  : pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\exp(t) = e^t$  et  $\exp(it) = e^{it}$ .

*Remarque 3* Dans la définition ci-dessus,  $e^{\operatorname{Re}(z)} > 0$ ,  $\operatorname{Im}(z) \in \mathbb{R}$  et  $|e^{i\operatorname{Im}(z)}| = 1$ . Ainsi d'une part,  $\exp(z) \neq 0$  et  $|\exp(z)| = e^{\operatorname{Re}(z)}$  et d'autre part,  $\operatorname{Arg}(\exp(z)) \equiv \operatorname{Im}(z) [2\pi]$ . Autrement dit,  $e^{\operatorname{Re}(z)} e^{i\operatorname{Im}(z)}$  est la forme trigonométrique de  $\exp(z)$ , donc **la forme algébrique de  $z$  fournit directement la forme trigonométrique de  $\exp(z)$** .

*Exemple 4*  $\exp\left(\frac{1}{2} - i\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{e} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2e}}{2}(1 - i)$ .

*Remarque 5* Cette définition est obtenue "naturellement" en exprimant que l'exponentielle d'une somme ( $z = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)$ ) est un produit d'exponentielles. Cela est vrai en toute généralité, d'après la proposition ci-dessous, qui résulte d'un calcul facile utilisant les formules d'addition de l'exponentielle sur  $\mathbb{R}$  et sur  $i\mathbb{R}$  vues précédemment.

**Théorème 6**  $\forall z, z' \in \mathbb{C}, \exp(z + z') = \exp(z) \exp(z')$ .

Comme dans le cas réel, l'exponentielle permet de définir les puissances complexes de réels strictement positifs :

**Définition 7** Pour  $x \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\alpha \in \mathbb{C}$ , on pose  $x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x))$ .

On a alors immédiatement la

**Proposition 8**  $\forall z \in \mathbb{C}, e^z = \exp(z)$ .

Contrairement au cas réel et conformément au cas des imaginaires purs, il se peut que deux nombres complexes aient la même exponentielle. Les cas d'égalités sont régis par le résultat suivant.

**Proposition 9**  $\forall z, z' \in \mathbb{C}, (e^z = e^{z'} \iff z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z})$ .

*Démonstration:* Soient  $z, z' \in \mathbb{C}$ . Rappelons que les nombres  $e^z$  et  $e^{z'}$  ne sont pas nuls. Leur égalité est alors équivalente à ce que leurs modules soient égaux et leurs arguments congrus modulo  $2\pi$ . L'égalité des modules  $e^{\operatorname{Re}(z)}$  et  $e^{\operatorname{Re}(z')}$  équivaut à l'égalité des parties réelles de  $z$  et  $z'$  d'après les propriétés de la fonction exponentielle sur  $\mathbb{R}$ . Par ailleurs  $\operatorname{Im}(z)$  et  $\operatorname{Im}(z')$  sont des arguments respectifs de  $e^z$  et  $e^{z'}$ . Ainsi  $e^z = e^{z'}$  si et seulement si  $z$  et  $z'$  ont même partie réelle et des parties imaginaires congrues modulo  $2\pi$ , ce qui équivaut à ce que  $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$ .  $\square$

On peut alors savoir précisément quels sont les complexes d'exponentielle donnée :

**Théorème 10** Pour  $a \in \mathbb{C}$  fixé, on considère l'équation  $(E_a) : \exp(z) = a$ , d'inconnue complexe  $z$ , et on note  $S_a$  l'ensemble de ses solutions. On a alors les résultats suivants :

- Si  $a = 0$ ,  $S_a = \emptyset$ .
- Si  $a \neq 0$ ,  $S_a = \{\ln|a| + i(\text{Arg}(a) + 2k\pi); k \in \mathbb{Z}\}$ .

*Démonstration:* On sait déjà que l'équation n'a pas de solutions si  $a = 0$ . Dans le cas où  $a \neq 0$ ,

$$\exp(\ln|a| + i\text{Arg}(a)) = \exp(\ln|a|) \exp(i\text{Arg}(a)) = |a| e^{i\text{Arg}(a)} = a$$

donc  $\ln|a| + i\text{Arg}(a)$  est solution, et toutes les autres s'en déduisent par un multiple entier de  $2i\pi$  d'après la proposition précédente.  $\square$

*Exemple 11* Les solutions de l'équation  $e^z = 1 + i$  sont les nombres  $\frac{\ln 2}{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$ , où  $k$  parcourt  $\mathbb{Z}$ .

*Exercice 12* Soient  $f$  une fonction de variable complexe à valeurs réelles et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On appelle courbe de niveau  $\lambda$  de la fonction  $f$  l'ensemble  $C_\lambda = \{z \in \mathbb{C} | f(z) = \lambda\}$  (qui est en général une "vraie" courbe).

Déterminer et dessiner les courbes de niveau des fonctions  $|\exp|$  et  $\text{Arg}(\exp)$ , ainsi que les images de ces courbes par la fonction  $\exp$ . Remarquer que la deuxième fonction n'en est pas vraiment une puisqu'elle est définie seulement modulo  $2\pi$ . Expliquer pourquoi cela n'est pas gênant ici.

(Réponse : les courbes de niveau de la première fonction sont des "droites verticales" dont on précisera l'abscisse. Leurs images par la fonction  $\exp$  sont des "cercles centrés en 0". Les courbes de niveau de la seconde sont des réunions de "droites horizontales" dont on précisera les ordonnées. Leurs images sont des "demi-droites issues de 0", privées de 0.)

## XI Traduction complexe de problèmes affines

Le résultat suivant permet de traduire des problèmes de géométrie affine euclidienne en des problèmes algébriques sur les nombres complexes, qui peuvent alors se résoudre par le calcul. Ce point de vue est un outil puissant pour attaquer certaines questions de géométrie.

On se place dans un plan affine euclidien  $\mathcal{P}$  muni d'un repère orthonormé direct (ROND) et on utilise la correspondance usuelle avec  $\mathbb{C}$  en notant  $z_M$  l'affixe de chaque point  $M \in \mathcal{P}$ . On note  $d$  la distance sur  $\mathcal{P}$  et  $(PQ)$  la droite passant par deux points distincts  $P$  et  $Q$ .

**Proposition 13** Si  $A, B, C \in \mathcal{P}$  sont tels que  $B \neq A$  et  $C \neq A$ , en notant  $z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ , on a

$$\left\{ \begin{array}{l} |z| = \frac{d(A, C)}{d(A, B)} \\ \text{Arg}(z) \equiv \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} \pmod{2\pi} \end{array} \right.$$

*Démonstration:* L'égalité concernant le module découle directement de l'interprétation géométrique du module vue précédemment et du fait que le module d'un quotient est le quotient des modules.

La congruence concernant l'argument découle directement de l'interprétation des arguments en termes d'angles vue précédemment et des opérations sur les arguments.  $\square$

*Exercice 14* Faire une figure correspondant aux cas  $z = 2, i, i - 1$ .

*Exercice 15* On considère les trois points de  $\mathcal{P}$  :  $M(1, 0)$ ,  $N(0, 1)$  et  $P(1 + \sqrt{3}, \sqrt{3})$ . Déterminer l'angle  $\widehat{MNP}$ .

On déduit de cette proposition des conditions d'alignement et d'orthogonalité.

**Proposition 16** Trois points  $A, B, C \in \mathcal{P}$  sont alignés si et seulement si  $(z_C - z_A)\overline{(z_B - z_A)} \in \mathbb{R}$ .

*Démonstration:* Dans le cas où  $B = A$  ou  $C = A$ , les points sont alignés et  $(z_C - z_A)\overline{(z_B - z_A)} = 0 \in \mathbb{R}$ .

Reste à traiter le cas où  $B \neq A$  et  $C \neq A$ . Dans ce cas  $(z_C - z_A)\overline{(z_B - z_A)} \neq 0$ . On alors

$$C \in (AB) \iff \widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})} \equiv 0 \quad [\pi].$$

Par la proposition ci-dessus, cela équivaut à ce que  $\text{Arg} \left( \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) \equiv 0 \quad [\pi]$ . Cependant

$$\text{Arg} \left( \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) \equiv \text{Arg}(z_C - z_A) - \text{Arg}(z_B - z_A) \equiv \text{Arg} \left( (z_C - z_A)\overline{(z_B - z_A)} \right) \quad [2\pi],$$

donc l'alignement a lieu si et seulement si  $\text{Arg} \left( (z_C - z_A)\overline{(z_B - z_A)} \right) \equiv 0 \quad [\pi]$ , *i.e.* si et seulement si  $(z_C - z_A)\overline{(z_B - z_A)} \in \mathbb{R}^*$ .  $\square$

**Proposition 17** Pour  $A, B, C \in \mathcal{P}$ ,  $\vec{AC} \perp \vec{AB} \iff (z_C - z_A)\overline{(z_B - z_A)} \in i\mathbb{R}$ .

*Démonstration:* Similaire à la précédente avec des congruences à  $\frac{\pi}{2}$  modulo  $\pi$ .  $\square$

Une application classique de ces techniques est le résultat suivant.

*Exercice 18* Un triangle  $ABC$  est équilatéral direct (*i.e.* on parcourt les trois sommets  $A, B$  et  $C$  en tournant autour du triangle dans le sens trigonométrique) si et seulement si  $z_A + jz_B + j^2z_C = 0$  (en notant  $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$  la racine cubique de l'unité de partie imaginaire strictement positive).

## XII Similitudes directes

On rappelle que le plan  $\mathcal{P}$  a été introduit dans la section précédente,

**Proposition 19** Une application  $F$  de  $\mathcal{P}$  vers  $\mathcal{P}$  est uniquement déterminée par la donnée de l'application  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  qui à tout complexe  $z_M$  fait correspondre le complexe  $z_{F(M)}$ .

*Démonstration:* Pour tout  $M \in \mathcal{P}$  d'affixe  $z$ ,  $F(M)$  est le point d'affixe  $f(z)$ .  $\square$

**Définition 20** Avec les notations ci-dessus, on appellera  $f$  la *traduction complexe* de  $F$ .

*Exemples 21* L'identité  $\text{Id}_{\mathcal{P}}$  a pour traduction complexe  $\text{Id}_{\mathbb{C}}$ . La conjugaison  $z \mapsto \bar{z}$  est la traduction complexe de la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

**Définition 22** Une *similitude directe* est une application de  $\mathcal{P}$  vers  $\mathcal{P}$  qui est bijective (i.e. tout point a exactement un antécédent) et qui préserve les angles orientés de vecteurs. Nous noterons  $\text{Sim}_+$  l'ensemble des similitudes directes.

*Exemples 23* Avec moult dessins et interactions : identité, translations, rotations, homothéties de rapport non nul, composée de similitudes directes, inverse d'une similitude directe.

**Proposition 24** En particulier, une similitude directe préserve l'alignement, le non-alignement et l'orthogonalité.

*Démonstration:* Soient  $F$  une similitude directe,  $A, B, C \in \mathcal{P}$  alignés et  $A', B', C'$  leurs images par  $F$ . Si  $A, B, C$  ne sont pas deux-à-deux distincts, leurs images non plus et elles sont donc alignées. Sinon, par bijectivité (en fait injectivité) de  $F$ ,  $A', B', C'$  sont aussi deux-à-deux distincts et, comme  $F$  préserve les angles orientés de vecteurs,

$$\widehat{A'B'C'} \equiv \widehat{ABC} \equiv 0 [\pi],$$

donc  $A', B', C'$  sont alignés.

Des raisonnements analogues prouvent la conservation du non-alignement et de l'orthogonalité.  $\square$

**Théorème 25** Les similitudes directes sont les applications de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathcal{P}$  ayant une traduction complexe de la forme  $z \mapsto az + b$ , avec  $a \neq 0$ .

*Démonstration:* On commence par montrer que les applications de  $\mathcal{C}$  vers  $\mathcal{C}$  ayant une telle traduction complexe préservent les angles orientés de vecteurs, ce qui découle de la proposition 13 et d'un calcul simple. Comme leur traduction complexe est bijective (facile), ces applications sont bijectives et ce sont donc des similitudes directes.

On montre ensuite que toute similitude directe  $F$  a une traduction complexe  $f$  de cette forme, par analyse-synthèse.

Soit  $F \in \text{Sim}_+$  et  $f$  sa traduction complexe.

**Analyse.** Si  $f$  est de la forme  $z \mapsto az + b$ , alors  $b = f(0)$  et  $a = f(1) - f(0)$ .

**Synthèse.** On pose  $a = f(1) - f(0)$  et  $b = f(0)$ . Comme  $f$  est bijective, donc injective, et  $1 \neq 0$ , il s'ensuit que  $a \neq 0$ . On considère alors  $\tilde{f} : z \mapsto az + b$  et  $\tilde{F}$  l'application de traduction complexe  $\tilde{f}$ , qui est une similitude directe par la première partie de la démonstration. Il est clair que l'origine  $O$  et le point  $I$  d'affixe 1 ont la même image par  $F$  et  $\tilde{F}$  et ces images  $O'$  et  $I'$  sont différentes par bijectivité des similitudes. Pour  $M \in \mathcal{P} \setminus \{O, I\}$ , on note  $M' = F(M)$  et  $M'' = \tilde{F}(M)$ . On montre que  $M' = M''$  par disjonction de cas :

— Pour  $M$  en dehors de la droite  $(OI)$ ,  $M' \notin (O'I')$  (préservation du non alignement) et, par conservation des angles orientés par les deux similitudes directes  $\tilde{F}$  et  $F$ ,

$$\widehat{O'I'M''} = \widehat{OIM} = \widehat{O'I'M'},$$

donc  $M'' \in (I'M')$ . De même  $\widehat{I'O'M''} = \widehat{IOM} = \widehat{I'O'M'}$  donc  $M'' \in (O'M')$ . Les droites  $(I'M')$  et  $(O'M')$  étant différentes par bijectivité de  $F$ , puisque  $(IM) \neq (OM)$  (car  $M \notin (OI)$ ), elles sont sécantes en  $M'$  et comme  $M''$  est dans leur intersection,  $M' = M''$ .

- Pour  $M \in (OI) \setminus \{O, I\}$ , on remplace dans le raisonnement précédent,  $I$  par un point  $A \notin (OI)$ , qui a la même image par  $F$  et  $\tilde{F}$ , d'après le traitement du cas précédent. On montre ainsi que  $M' = M''$ .

On a ainsi montré que  $F = \tilde{F}$ , donc la traduction complexe de  $F$  est bien de la forme voulue.  $\square$

On a en outre vu ci-dessus (partie “analyse”) la

**Proposition 26** Pour une similitude directe  $F$  de traduction complexe  $z \mapsto az + b$ , les nombres complexes  $a$  et  $b$  sont uniquement déterminés par  $F$ .

**Définition 27** Avec ces notations, on appelle *rapport complexe* (ou simplement *rapport*) de  $F$  le nombre complexe non nul  $a$ .

On appelle aussi parfois *rapport positif* de  $F$  le nombre strictement positif  $|a|$ .

Le terme “rapport” est justifié par le résultat suivant :

**Proposition 28** Une similitude directe de rapport complexe  $a$  multiplie les distances par  $|a|$ .

*Démonstration:* Soit  $F \in \text{Sim}_+$  de traduction complexe  $f : z \mapsto az + b$ . Pour  $M, N \in \mathcal{P}$ ,

$$d(F(M), F(N)) = |z_{F(N)} - z_{F(M)}| = |(az_N + b) - (az_M + b)| = |a| |z_N - z_M| = |a| d(M, N).$$

$\square$

### Classification des similitudes directes par le rapport complexe $a$ .

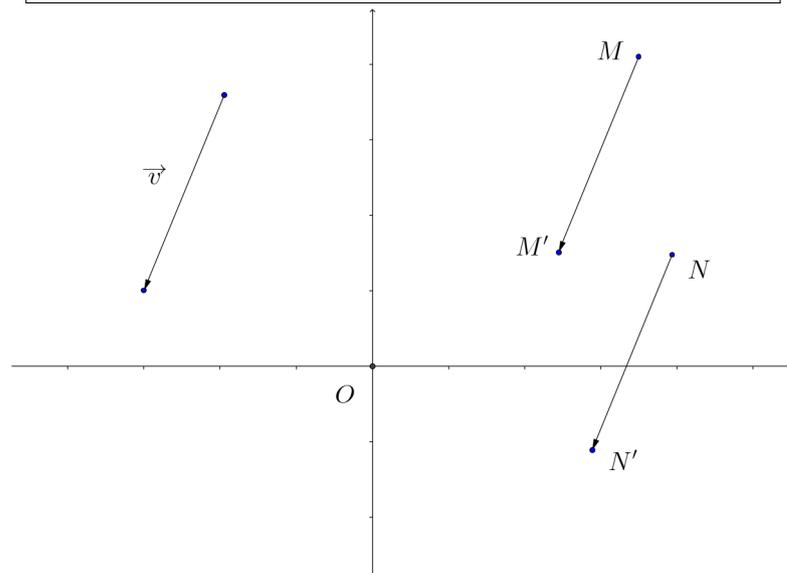
Soit  $F \in \text{Sim}_+$  de traduction complexe  $f : z \mapsto az + b$ . Pour alléger, on notera  $M' = F(M)$ .

- **cas**  $a = 1$  : en notant  $\vec{v}$  le vecteur d’affixe  $b$ , pour  $M \in \mathcal{P}$ ,

$$z_{M'} - z_M = (z_M + b) - z_M = b \quad \text{i.e.} \quad \boxed{\overrightarrow{MM'} = \vec{v}}.$$

Comme le vecteur  $\overrightarrow{MM'}$  est constant,  $F$  est appelée *la translation de vecteur*  $\vec{v}$  et on la note, ainsi que sa traduction complexe :

$$T_{\vec{v}} : \begin{cases} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ M & \longmapsto & M + \vec{v} \end{cases} \quad \text{et} \quad t_b : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z + b \end{cases}.$$



On alors deux sous-cas :

- cas particulier  $b = 0$  : dans ce cas  $T_{\vec{0}} = \text{Id}_{\mathcal{P}}$  et tous les points de  $\mathcal{P}$  sont fixés par  $T_{\vec{0}}$ ;
  - cas  $b \neq 0$  : dans ce cas,  $\vec{v} \neq \vec{0}$  et aucun point n'est fixé par  $T_{\vec{v}}$ .
- **cas  $a \neq 1$**  : dans ce cas, il y a (trivialement) un seul point fixe  $C$ , qui est d'affixe  $c = \frac{b}{1-a}$  et qu'on appelle le *centre* de la similitude  $F$ .  
 Pour  $M \in \mathcal{P} \setminus \{C\}$ , un calcul immédiat donne

$$a = \frac{z_{M'} - c}{z_M - c}$$

et, par la proposition 13,

$$d(C, M') = |a| d(C, M) \quad \text{et} \quad \widehat{MCM'} \equiv \text{Arg}(a) [2\pi],$$

la première relation étant déjà connue puisque  $F(C) = C$  et  $F$  multiplie les distances par  $|a|$ . Remarquons qu'on a aussi la formule très utile :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = c + a(z - c).$$

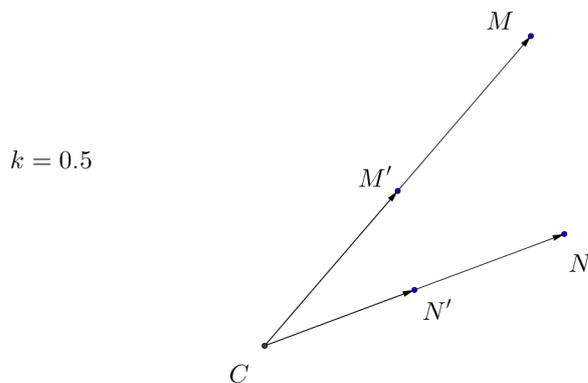
On a alors plusieurs cas particuliers :

- cas particulier  $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$  : dans ce cas, on note classiquement  $k = a$  et on a immédiatement, pour tout  $M \in \mathcal{P}$ ,

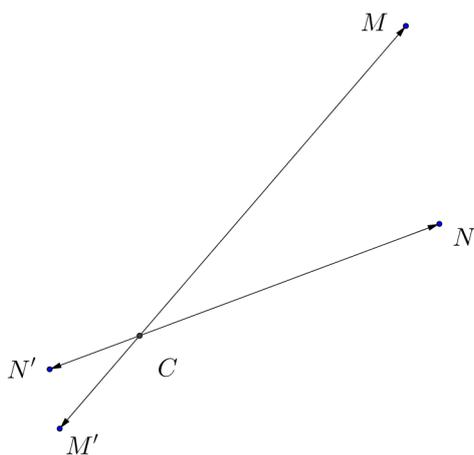
$$\overrightarrow{CM'} = k \overrightarrow{CM}.$$

La similitude  $F$  est alors appelée l'*homothétie* de *centre*  $C$  et de *rapport*  $k$  et on la note, ainsi que sa traduction complexe :

$$H_{C,k} : \begin{cases} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ M & \longmapsto & C + k \overrightarrow{CM} \end{cases} \quad \text{et} \quad h_{c,k} : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & c + k(z - c) \end{cases}.$$



$$k = -0.3$$

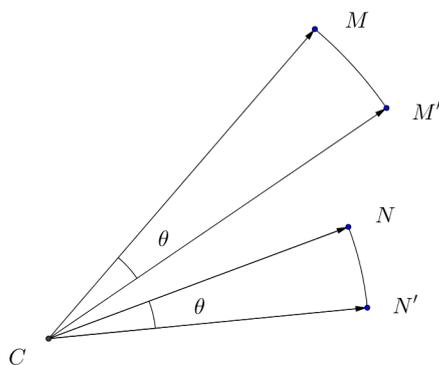


— cas particulier  $a \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$  : dans ce cas, on note  $a = e^{i\theta}$ , avec  $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$  et on a immédiatement, pour tout  $M \in \mathcal{P} \setminus \{C\}$ ,

$$\boxed{d(C, M') = d(C, M) \quad \text{et} \quad \widehat{MCM'} \equiv \theta [2\pi].}$$

La similitude  $F$  est alors appelée la *rotation* de centre  $C$  et de *mesure d'angle*  $\theta$  et on la note, ainsi que sa traduction complexe :

$$\boxed{R_{C,\theta} : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P} \quad \text{et} \quad r_{c,\theta} : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & c + e^{i\theta}(z - c) \end{cases} .}$$



**Attention, ce cas n'est pas disjoint du précédent, comme le montre le**

- cas très particulier  $a = -1$  : dans ce cas, on a à la fois une homothétie de rapport  $-1$  et une rotation de mesure d'angle  $\pi$ , qui est aussi la *symétrie de centre C*, qu'on note, ainsi que sa traduction complexe :

$$S_C : \begin{cases} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ M & \longmapsto & C - \overrightarrow{CM} \end{cases} \quad \text{et} \quad s_c : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & c - (z - c) = 2c - z \end{cases} .$$

- cas général : en notant  $k = |a|$  et  $\theta \equiv \text{Arg } a [2\pi]$ , on voit que, pour  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$\begin{aligned} f(z) &= c + a(z - c) \\ &= c + ke^{i\theta}(z - c) \\ &= c + k((c + e^{i\theta}(z - c)) - c) \\ &= h_{c,k}(r_{c,\theta}(z)) \end{aligned}$$

et aussi, de manière analogue

$$\begin{aligned} f(z) &= c + e^{i\theta}((c + k(z - c)) - c) \\ &= r_{c,\theta}(h_{c,k}(z)) \end{aligned}$$

La similitude  $F$  est ainsi la composée “commutative” d'une homothétie et d'une rotation de même de centre :

$$F = H_{C,k} \circ R_{C,\theta} = R_{C,\theta} \circ H_{C,k} \quad \text{et} \quad f = h_{c,k} \circ r_{c,\theta} = r_{c,\theta} \circ h_{c,k} .$$

Une compétence de base est de savoir déterminer la nature géométrique d'une similitude directe, ainsi que ses éléments caractéristiques (vecteur d'une translation, centre et rapport d'une homothétie, centre et mesure d'angle d'une rotation). Voir pour cela les exercices de TD.

Par ailleurs, les similitudes directes sont des applications tellement “rigides” qu'il suffit des images de deux points pour les déterminer de manière unique :

**Théorème 29** *Il existe une unique similitude directe envoyant un premier couple de points distincts donné sur un second couple de points distincts donné,*

*Démonstration:* Soient  $M, N \in \mathcal{P}$  différents et  $M', N' \in \mathcal{P}$  différents.

**Analyse.** Soit  $F \in \text{Sim}_+$  telle que  $F(M) = M'$  et  $F(N) = N'$ .

En notant  $f : z \longmapsto az + b$  sa traduction complexe, on a alors

$$\begin{cases} az_M + b &= z_{M'} \\ az_N + b &= z_{N'} \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} az_M + b &= z_{M'} \\ a(z_N - z_M) &= z_{N'} - z_{M'} \end{cases}$$

Or  $M \neq N$ , donc  $z_N - z_M \neq 0$  et  $F$  est uniquement déterminée par

$$\begin{cases} a &= \frac{z_{N'} - z_{M'}}{z_N - z_M} \\ b &= z_{M'} - z_M \frac{z_{N'} - z_{M'}}{z_N - z_M} \end{cases}$$

**Synthèse.** On pose

$$a = \frac{z_{N'} - z_{M'}}{z_N - z_M} \quad \text{et} \quad b = z_{M'} - z_M \frac{z_{N'} - z_{M'}}{z_N - z_M}$$

et on définit  $F$  comme la similitude directe de traduction complexe  $f : z \mapsto az + b$ .

On a alors

$$f(z_M) = \frac{z_{N'} - z_{M'}}{z_N - z_M} \cdot z_M + z_{M'} - z_M \frac{z_{N'} - z_{M'}}{z_N - z_M} = z_{M'}$$

et

$$f(z_N) = \frac{z_{N'} - z_{M'}}{z_N - z_M} \cdot z_N + z_{M'} - z_M \frac{z_{N'} - z_{M'}}{z_N - z_M} = z_{N'}$$

donc

$$F(M) = M' \quad \text{et} \quad F(N) = N',$$

*i.e.*

$F$  convient.

□

*Remarque 30* Pour déterminer pratiquement une telle similitude, on sait déjà, par ce théorème, qu'elle existe, donc il suffit de résoudre le système de la partie "analyse", comme dans l'exercice type suivant.

*Exercice 31* Soient  $M(2, 1)$ ,  $N(1, 0)$ ,  $M'(0, 1)$  et  $N'(4, 1)$  quatre points de  $\mathcal{P}$ .

Déterminer l'unique similitude directe  $F$  telle que  $F(M) = M'$  et  $F(N) = N'$  et la caractériser géométriquement.

Comme  $M \neq N$  et  $M' \neq N'$ , on sait par le théorème précédent qu'il existe une unique telle similitude  $F$ .

En notant  $f : z \mapsto az + b$  sa traduction complexe, on a

$$\begin{cases} az_M + b = z_{M'} \\ az_N + b = z_{N'} \end{cases}$$

*i.e.*

$$\begin{cases} (2+i)a + b = i \\ a + b = 4+i \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} (1+i)a = -4 & (L_1 \leftarrow L_1 - L_2) \\ b = 4+i-a \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} 2a = -4(1-i) \\ b = 4+i-a \end{cases}$$

et finalement

$$\begin{cases} a = -2+2i \\ b = 6-i \end{cases}$$

Ainsi,

la traduction complexe de  $F$  est  $z \mapsto 2(-1+i)z + 6-i$ .

Comme  $2(-1+i) \neq 1$ , la similitude n'est pas une translation et a donc un centre  $C$  dont l'affixe est

$$c = \frac{6-i}{3-2i} = \frac{(6-i)(3+2i)}{13} = \frac{20}{13} + i\frac{9}{13},$$

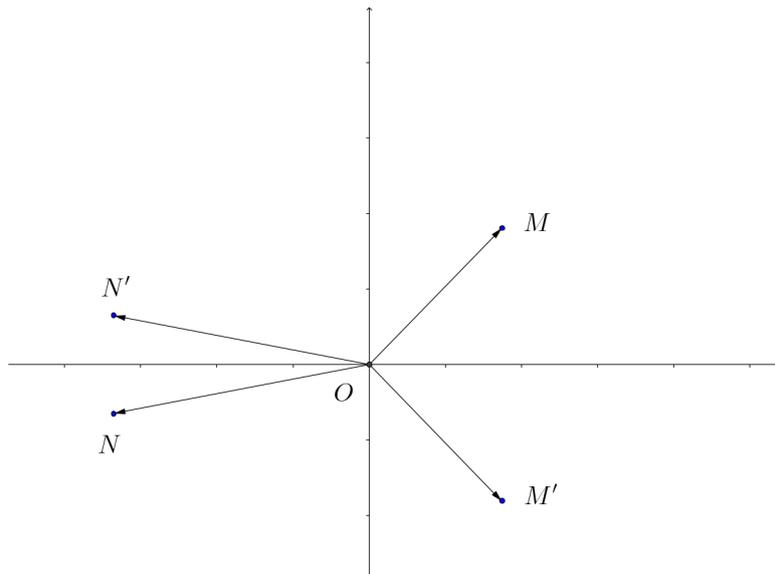
donc

le centre  $C$  est de coordonnées  $(\frac{20}{13}, \frac{9}{13})$ .

Comme  $2(-1+i) = 2\sqrt{2}e^{3i\pi/4}$ ,

$F = H_{C,2\sqrt{2}} \circ R_{C,3\pi/4} = R_{C,3\pi/4} \circ H_{C,2\sqrt{2}}$ .

*Remarque 32* Enfin, on rappelle que la conjugaison  $z \mapsto \bar{z}$  est la traduction complexe de la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses :



C'est un cas particulier de similitude indirecte, *i.e.* une application de  $\mathcal{P}$  vers  $\mathcal{P}$  qui change les angles en leurs opposés. L'étude des similitudes indirectes est hors du programme de MPSI. Cependant, on peut retenir que ce sont les transformations de  $\mathcal{P}$  dont la traduction complexe est de la forme  $z \mapsto a\bar{z} + b$ , avec  $a \neq 0$ .