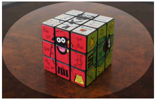
Opération casse-têtes

Frédéric Mouton
Lycée Berthollet (Annecy)

Séminaire du Magistère de Mathématiques, UGA
10 décembre 2020



Le cube de Rubik

Ernö Rubik, 1974

Mécanisme

Mécanisme

Le but du jeu

Le but du jeu

En pratique...

En pratique... on est souvent bloqué là !

Le remède...

Le remède... des formules magiques

$$\overline{\mathbf{G}}\,\mathbf{A}\,\mathbf{D}\,\overline{\mathbf{A}}\,\mathbf{G}\,\mathbf{A}\,\overline{\mathbf{D}}\,\overline{\mathbf{A}}$$

permute circulairement trois sommets de la face avant
sans rien changer d'autre.
Une vidéo montrait cela pendant l'exposé.

Questions mathématiques

Questions mathématiques

- Combien de remontages physiques (configurations illégales) ?

Questions mathématiques

- Combien de remontages physiques (configurations illégales) ? $N_i = 8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12} \simeq 5,2 \cdot 10^{20}$

Questions mathématiques

- Combien de remontages physiques (configurations illégales) ? $N_i = 8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12} \simeq 5,2 \cdot 10^{20}$
- Si je le remonte au hasard, puis-je le refaire légalement ?

Questions mathématiques

- Combien de remontages physiques (configurations illégales) ? $N_i = 8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12} \simeq 5,2 \cdot 10^{20}$
- Si je le remonte au hasard, puis-je le refaire légalement ? Pas toujours

Questions mathématiques

- Combien de remontages physiques (configurations illégales) ? $N_i = 8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12} \simeq 5,2 \cdot 10^{20}$
- Si je le remonte au hasard, puis-je le refaire légalement ? Pas toujours
- Avec quelle probabilité est-ce faisable ?

Questions mathématiques

- Combien de remontages physiques (configurations illégales) ? $N_i = 8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12} \simeq 5,2 \cdot 10^{20}$
- Si je le remonte au hasard, puis-je le refaire légalement ? Pas toujours
- Avec quelle probabilité est-ce faisable ? $1/12$

Questions mathématiques

- Combien de remontages physiques (configurations illégales) ? $N_i = 8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12} \simeq 5,2 \cdot 10^{20}$
- Si je le remonte au hasard, puis-je le refaire légalement ? Pas toujours
- Avec quelle probabilité est-ce faisable ? $1/12$
- Comment reconnaître les configurations légales ?

Questions mathématiques

- Combien de remontages physiques (configurations illégales) ? $N_i = 8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12} \simeq 5,2 \cdot 10^{20}$
- Si je le remonte au hasard, puis-je le refaire légalement ? Pas toujours
- Avec quelle probabilité est-ce faisable ? $1/12$
- Comment reconnaître les configurations légales ? Pas facile, mais faisable

Questions mathématiques

- Combien de remontages physiques (configurations illégales) ? $N_i = 8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12} \simeq 5,2 \cdot 10^{20}$
- Si je le remonte au hasard, puis-je le refaire légalement ? Pas toujours
- Avec quelle probabilité est-ce faisable ? $1/12$
- Comment reconnaître les configurations légales ? Pas facile, mais faisable
- Combien y en a-t-il ?

Questions mathématiques

- Combien de remontages physiques (configurations illégales) ? $N_i = 8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12} \simeq 5,2 \cdot 10^{20}$
- Si je le remonte au hasard, puis-je le refaire légalement ? Pas toujours
- Avec quelle probabilité est-ce faisable ? $1/12$
- Comment reconnaître les configurations légales ? Pas facile, mais faisable
- Combien y en a-t-il ? $N_i/12$

Questions mathématiques

- Combien de remontages physiques (configurations illégales) ? $N_i = 8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12} \simeq 5,2 \cdot 10^{20}$
- Si je le remonte au hasard, puis-je le refaire légalement ? Pas toujours
- Avec quelle probabilité est-ce faisable ? $1/12$
- Comment reconnaître les configurations légales ? Pas facile, mais faisable
- Combien y en a-t-il ? $N_i/12$
- Groupe ?

Questions mathématiques

- Combien de remontages physiques (configurations illégales) ? $N_i = 8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12} \simeq 5,2 \cdot 10^{20}$
- Si je le remonte au hasard, puis-je le refaire légalement ? Pas toujours
- Avec quelle probabilité est-ce faisable ? $1/12$
- Comment reconnaître les configurations légales ? Pas facile, mais faisable
- Combien y en a-t-il ? $N_i/12$
- Groupe ? d'indice 2 dans

$$\left(\mathcal{S}_{12} \ltimes (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{11}\right) \times \left(\mathcal{S}_8 \ltimes (\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})^{7}\right)$$

Nombre de Dieu

Nombre de Dieu

La distance entre deux configurations est le nombre minimum de quarts de tours ou demi-tours nécessaire pour passer de l'une à l'autre.

Nombre de Dieu

La distance entre deux configurations est le nombre minimum de quarts de tours ou demi-tours nécessaire pour passer de l'une à l'autre.
Le nombre de Dieu N est la distance maximum d'une configuration légale à la configuration initiale.

Nombre de Dieu

La distance entre deux configurations est le nombre minimum de quarts de tours ou demi-tours nécessaire pour passer de l'une à l'autre.
Le nombre de Dieu N est la distance maximum d'une configuration légale à la configuration initiale.
Il était connu depuis une vingtaine d'années que la distance du superflip à la configuration initiale est 20, que $N \leq 23$, et conjecturé que $N = 22$ ou 23.

En 2010, il a été montré que $N = 20$ par une équipe de trois personnes : un mathématicien, un informaticien et un ingénieur.

En 2010, il a été montré que $N = 20$ par une équipe de trois personnes : un mathématicien, un informaticien et un ingénieur.
La démonstration a nécessité une réduction du nombre de cas utilisant fortement la théorie de groupes, des algorithmes sophistiqués et un traitement en parallèle utilisant un grand nombre d'ordinateurs.

Casse-têtes à permutations

Quelques exemples intéressants

Aujourd'hui

Aujourd'hui

- Tournaplat2X3
- Tournaplat3X3
- Pyraplat

Quelques rappels

Commutateurs et conjugués

Pour $x, y \in G$,

Commutateurs et conjugués

Pour $x, y \in G$,

- le commutateur de x et y est $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$

Commutateurs et conjugués

Pour $x, y \in G$,

- le commutateur de x et y est $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ qui vaut 1 quand x et y commutent ;
- le conjugué de x par y est yxy^{-1},

Commutateurs et conjugués

Pour $x, y \in G$,

- le commutateur de x et y est $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ qui vaut 1 quand x et y commutent ;
- le conjugué de x par y est yxy^{-1}, de même type “géométrique” que x !

Commutateurs et conjugués

Pour $x, y \in G$,

- le commutateur de x et y est $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ qui vaut 1 quand x et y commutent ;
- le conjugué de x par y est yxy^{-1}, de même type “géométrique” que x !
- la conjugaison par y, $x \longmapsto yxy^{-1}$ est un automorphisme de G appelé automorphisme *intérieur*.

Groupe des permutations

- $(\mathcal{S}_X, \circ)$ est le groupe des bijections de X vers X

Groupe des permutations

- $(\mathcal{S}_X, \circ)$ est le groupe des bijections de X vers X
- Pour $X = [\![1, n]\!]$, on le note $\mathcal{S}_n$

Groupe des permutations

- $(\mathcal{S}_X, \circ)$ est le groupe des bijections de X vers X
- Pour $X = [\![1, n]\!]$, on le note $\mathcal{S}_n$
- Toute $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est produit de cycles à supports disjoints

Groupe des permutations

- $(\mathcal{S}_X, \circ)$ est le groupe des bijections de X vers X
- Pour $X = [\![1, n]\!]$, on le note $\mathcal{S}_n$
- Toute $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est produit de cycles à supports disjoints
- Signature : morphisme non trivial de $\mathcal{S}_n$ vers $\{\pm 1\}$

Groupe des permutations

- $(\mathcal{S}_X, \circ)$ est le groupe des bijections de X vers X
- Pour $X = [\![1, n]\!]$, on le note $\mathcal{S}_n$
- Toute $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est produit de cycles à supports disjoints
- Signature : morphisme non trivial de $\mathcal{S}_n$ vers $\{\pm 1\}$
- Son noyau est le groupe alterné $\mathcal{A}_n$

Groupe des permutations

- $(\mathcal{S}_X, \circ)$ est le groupe des bijections de X vers X
- Pour $X = [\![1, n]\!]$, on le note $\mathcal{S}_n$
- Toute $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est produit de cycles à supports disjoints
- Signature : morphisme non trivial de $\mathcal{S}_n$ vers $\{\pm 1\}$
- Son noyau est le groupe alterné $\mathcal{A}_n$
- Un r-cycle est de signature $(-1)^{r-1}$

Groupe des permutations

- $(\mathcal{S}_X, \circ)$ est le groupe des bijections de X vers X
- Pour $X = [\![1, n]\!]$, on le note $\mathcal{S}_n$
- Toute $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est produit de cycles à supports disjoints
- Signature : morphisme non trivial de $\mathcal{S}_n$ vers $\{\pm 1\}$
- Son noyau est le groupe alterné $\mathcal{A}_n$
- Un r-cycle est de signature $(-1)^{r-1}$
- Les transpositions engendrent $\mathcal{S}_n$

Groupe des permutations

- $(\mathcal{S}_X, \circ)$ est le groupe des bijections de X vers X
- Pour $X = [\![1, n]\!]$, on le note $\mathcal{S}_n$
- Toute $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est produit de cycles à supports disjoints
- Signature : morphisme non trivial de $\mathcal{S}_n$ vers $\{\pm 1\}$
- Son noyau est le groupe alterné $\mathcal{A}_n$
- Un r-cycle est de signature $(-1)^{r-1}$
- Les transpositions engendrent $\mathcal{S}_n$
- Les 3-cycles engendrent $\mathcal{A}_n$

Actions de groupes

Un action (ou opération) d'un groupe G sur un ensemble X est un morphisme ϕ de G vers $\mathcal{S}_X$.
On note $(\phi(g))(x) = g \cdot x$ et on a

- $\forall x \in X,\ 1.x = x$
- $\forall g, g' \in G, \forall x \in X,\ (gg') \cdot x = g \cdot (g' \cdot x)$

Une idée fondamentale

- Fait : deux permutations à support disjoints commutent, *i.e.* leur commutateur est trivial

Une idée fondamentale

- Fait : deux permutations à support disjoints commutent, *i.e.* leur commutateur est trivial
- Idée : deux permutations à support presque disjoints commutent presque : leur commutateur bouge peu de choses

Un exercice

Montrer que si deux permutations ont des supports qui se coupent en un seul point, alors leur commutateur est un 3-cycle.

Commutateurs
et
formules magiques

Placement des cubes sommets

Placement des cubes sommets

On cherche à construire une suite de mouvements du cube dont le seul effet est une permutation circulaire de trois sommets.

Placement des cubes sommets

On cherche à construire une suite de mouvements du cube dont le seul effet est une permutation circulaire de trois sommets.

Pour cela, en vertu de ce qui précède, il suffit de trouver deux séquences de mouvements **S** et **T** telles que seul un cube sommet soit bougé par les deux séquences (et aucun cube arête ne le soit).

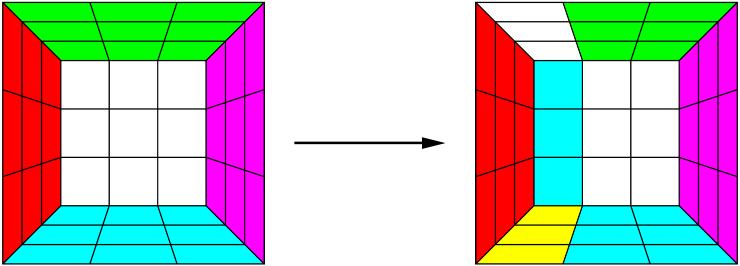
Placement des cubes sommets

On cherche à construire une suite de mouvements du cube dont le seul effet est une permutation circulaire de trois sommets.

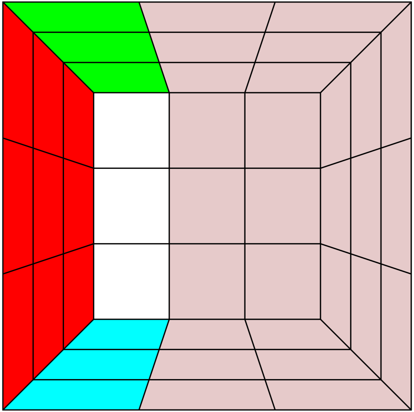
Pour cela, en vertu de ce qui précède, il suffit de trouver deux séquences de mouvements **S** et **T** telles que seul un cube sommet soit bougé par les deux séquences (et aucun cube arête ne le soit).

On choisit arbitrairement $\mathbf{S} = \overline{\mathbf{G}}$, rotation d'un quart de tour de la face gauche dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

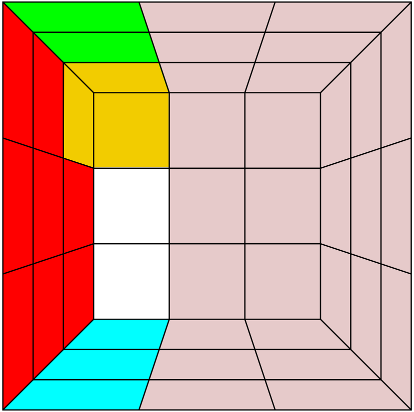
Mouvement $\overline{\mathbf{G}}$



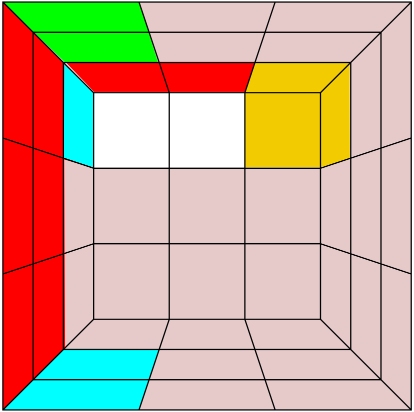
Recherche de **T**



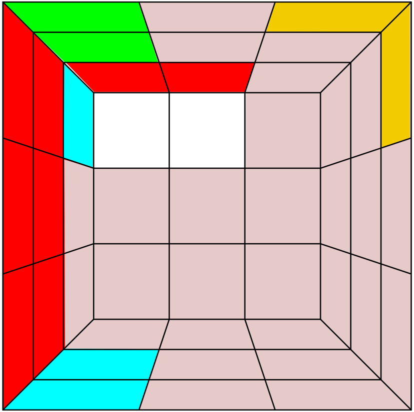
Recherche de **T**



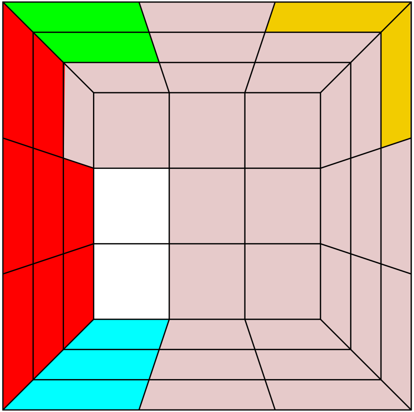
T = A . . .



T = AD . . .



$\mathbf{T} = \mathbf{A}\mathbf{D}\overline{\mathbf{A}}$ convient !



On retrouve la formule donnée au début

$$\overline{\mathbf{G}}\,\mathbf{A}\,\mathbf{D}\,\overline{\mathbf{A}}\,\mathbf{G}\,\mathbf{A}\,\overline{\mathbf{D}}\,\overline{\mathbf{A}}$$

Autres formules

Autres formules

En combinant deux formules du type précédent, il est possible de construire une formule d'orientation des CS.

Autres formules

En combinant deux formules du type précédent, il est possible de construire une formule d'orientation des CS. Avec le même type de méthode, on peut construire des formules de placement et d'orientation des CA.

Autres formules

En combinant deux formules du type précédent, il est possible de construire une formule d'orientation des CS.

Avec le même type de méthode, on peut construire des formules de placement et d'orientation des CA.

Cela permet de reconstituer la configuration initiale avec seulement quatre formules magiques.

Plus de formules

Plus de formules

Il est plus efficace de commencer par placer un maximum d'items “à la main”, par exemple de placer directement bien orientés les CA d'une face, puis ses CS.

Plus de formules

Il est plus efficace de commencer par placer un maximum d'items “à la main”, par exemple de placer directement bien orientés les CA d'une face, puis ses CS.
Ensuite, il est possible de placer et d'orienter en même temps, voire de placer et orienter plusieurs items en même temps. Il est nécessaire pour cela de connaître beaucoup de formules (plus d'une centaine pour les champions...)

Plus de formules

Il est plus efficace de commencer par placer un maximum d'items “à la main”, par exemple de placer directement bien orientés les CA d'une face, puis ses CS.
Ensuite, il est possible de placer et d'orienter en même temps, voire de placer et orienter plusieurs items en même temps. Il est nécessaire pour cela de connaître beaucoup de formules (plus d'une centaine pour les champions...)

- www.francocube.com
- “Speedsolving the cube” par Dan Harris

Conjugaison en pratique

La conjugaison

La conjugaison

Et si les cubes qu’on veut permuter ou orienter ne sont pas dans la configuration de départ pour une formule magique **S** (par exemple trois CS non dans une même face) ?

La conjugaison

Et si les cubes qu'on veut permuter ou orienter ne sont pas dans la configuration de départ pour une formule magique **S** (par exemple trois CS non dans une même face) ?
On s'en tire en construisant la bonne configuration de départ par une manipulation **T** (par exemple qui place les trois CS dans une même face). On applique alors **S** et il convient ensuite de tout remettre en place par $\overline{\mathbf{T}}$.

La conjugaison

Et si les cubes qu'on veut permuter ou orienter ne sont pas dans la configuration de départ pour une formule magique **S** (par exemple trois CS non dans une même face) ?
On s'en tire en construisant la bonne configuration de départ par une manipulation **T** (par exemple qui place les trois CS dans une même face). On applique alors **S** et il convient ensuite de tout remettre en place par $\overline{\mathbf{T}}$.
La formule totale est alors la **conjugaison** de **S** par **T** :
$\mathbf{TS}\overline{\mathbf{T}}$.

Groupe du Tournaplat2X3

Tournaplat2X3

Ce casse-tête est en ligne :

`http://mathemouton.free.fr/Magistere/Tournaplat2X3.html`

Tournaplat2X3

Ce casse-tête est en ligne :
`http://mathemouton.free.fr/Magistere/Tournaplat2X3.html`
Lorsqu'on place A,B,C sur la ligne du haut dans l'ordre, on voit que D,E,F sont toujours bien placés.

Tournaplat2X3

Ce casse-tête est en ligne :
`http://mathemouton.free.fr/Magistere/Tournaplat2X3.html`
Lorsqu'on place A,B,C sur la ligne du haut dans l'ordre, on voit que D,E,F sont toujours bien placés.
Cela permet de conjecturer que toutes les positions ne sont pas atteignables et même le cardinal du groupe du casse-tête $T_{2,3}$:

Tournaplat2X3

Ce casse-tête est en ligne :
`http://mathemouton.free.fr/Magistere/Tournaplat2X3.html`
Lorsqu'on place A,B,C sur la ligne du haut dans l'ordre, on voit que D,E,F sont toujours bien placés.
Cela permet de conjecturer que toutes les positions ne sont pas atteignables et même le cardinal du groupe du casse-tête $T_{2,3}$:

$$\left|T_{2,3}\right| = 6 \times 5 \times 4 = 120.$$

Définition de $T_{2,3}$

On numérote les cases ainsi (pour l'esthétique ultérieure) :

1	4	5
2	3	6

Définition de $T_{2,3}$

On numérote les cases ainsi (pour l'esthétique ultérieure) :

1	4	5
2	3	6

Un élément de $T_{2,3}$ est un élément de $\mathcal{S}_6$, correspondant à une suite de mouvements, qui donne les déplacements des lettres suivant les cases dans lesquelles elles sont.

Définition de $T_{2,3}$

On numérote les cases ainsi (pour l'esthétique ultérieure) :

1	4	5
2	3	6

Un élément de $T_{2,3}$ est un élément de $\mathcal{S}_6$, correspondant à une suite de mouvements, qui donne les déplacements des lettres suivant les cases dans lesquelles elles sont.
Par exemple, le mouvement de gauche, dans le sens des aiguilles d'une montre, donne (1432) : il envoie la lettre de la case 1 dans la case 4, *etc.*.

Mouvement composé

1	4	5
2	3	6

Si on effectue d'abord le mouvement de gauche dans le sens des aiguilles d'une montre, puis celui de droite dans le même sens, on obtient

Mouvement composé

1	4	5
2	3	6

Si on effectue d'abord le mouvement de gauche dans le sens des aiguilles d'une montre, puis celui de droite dans le même sens, on obtient le 5-cycle

$$(3456)(1432) = (15632)$$

Mouvement composé

1	4	5
2	3	6

Si on effectue d'abord le mouvement de gauche dans le sens des aiguilles d'une montre, puis celui de droite dans le même sens, on obtient le 5-cycle

$$(3456)(1432) = (15632)$$

Attention à la convention mathématique, différente de celle des joueurs !

Système générateur

Comme tourner 3 fois dans un sens revient à tourner dans l'autre,

$$T_{2,3} =< (1234), (3456) >\subset \mathcal{S}_6.$$

Système générateur

Comme tourner 3 fois dans un sens revient à tourner dans l'autre,

$$T_{2,3} = < (1234), (3456) > \subset \mathcal{S}_6.$$

Remarquons que cette inclusion donne un morphisme injectif de $T_{2,3}$ vers $\mathcal{S}_6$ et donc une action fidèle sur l'ensemble des places.

Système générateur

Comme tourner 3 fois dans un sens revient à tourner dans l'autre,

$$T_{2,3} = < (1234), (3456) > \subset \mathcal{S}_6.$$

Remarquons que cette inclusion donne un morphisme injectif de $T_{2,3}$ vers $\mathcal{S}_6$ et donc une action fidèle sur l'ensemble des places.

Pour le groupe du cube, on aurait des actions sur les places des CS, sur leur orientation (plus délicat) et de même pour les CA, ce qui permet de mieux comprendre la structure de ce groupe.

Synthèmes

On appelle *synthème* une partition non ordonnée de l'ensemble $[\![1,6]\!]$ en trois paires : $\{\{a,b\},\{c,d\},\{e,f\}\}$. On le note $ab|cd|ef$, sans unicité :

$$13|24|56 = 31|24|56 = 65|31|24$$

Synthèmes

On appelle *synthème* une partition non ordonnée de l'ensemble $[\![1,6]\!]$ en trois paires : $\{\{a,b\},\{c,d\},\{e,f\}\}$. On le note $ab|cd|ef$, sans unicité :

$$13|24|56 = 31|24|56 = 65|31|24$$

L'ensemble des synthèmes est noté Y.

Synthèmes

On appelle *synthème* une partition non ordonnée de l'ensemble $[\![1,6]\!]$ en trois paires : $\{\{a,b\},\{c,d\},\{e,f\}\}$.
On le note $ab|cd|ef$, sans unicité :

$$13|24|56 = 31|24|56 = 65|31|24$$

L'ensemble des synthèmes est noté Y.
$\mathcal{S}_6$, et donc $T_{2,3}$, agit sur Y :

$$\sigma \cdot ab|cd|ef = \sigma(a)\sigma(b)|\sigma(c)\sigma(d)|\sigma(e)\sigma(f)$$

Synthèmes

On appelle *synthème* une partition non ordonnée de l'ensemble $[\![1,6]\!]$ en trois paires : $\{\{a,b\},\{c,d\},\{e,f\}\}$. On le note $ab|cd|ef$, sans unicité :

$$13|24|56 = 31|24|56 = 65|31|24$$

L'ensemble des synthèmes est noté Y.
$\mathcal{S}_6$, et donc $T_{2,3}$, agit sur Y :

$$\sigma \cdot ab|cd|ef = \sigma(a)\sigma(b)|\sigma(c)\sigma(d)|\sigma(e)\sigma(f)$$

L'action de $T_{2,3}$ stabilise la *pentade*

$$P = \{12|35|46, 13|24|56, 14|25|36, 15|26|34, 16|23|45\}$$

Synthèmes

On appelle *synthème* une partition non ordonnée de l'ensemble $[\![1,6]\!]$ en trois paires : $\{\{a,b\},\{c,d\},\{e,f\}\}$.
On le note $ab|cd|ef$, sans unicité :

$$13|24|56 = 31|24|56 = 65|31|24$$

L'ensemble des synthèmes est noté Y.
$\mathcal{S}_6$, et donc $T_{2,3}$, agit sur Y :

$$\sigma \cdot ab|cd|ef = \sigma(a)\sigma(b)|\sigma(c)\sigma(d)|\sigma(e)\sigma(f)$$

L'action de $T_{2,3}$ stabilise la *pentade*

$$P = \{12|35|46, 13|24|56, 14|25|36, 15|26|34, 16|23|45\}$$

On obtient ainsi un isomorphisme de $T_{2,3}$ vers $\mathcal{S}_5$.

Plongement exceptionnel

On obtient ainsi un plongement de $\mathcal{S}_5$ dans $\mathcal{S}_6$ qui a ceci d'"exceptionnel" que ce n'est pas le sous-groupe stabilisateur d'un point.
De tels plongements exceptionnels de $\mathcal{S}_{n-1}$ dans $\mathcal{S}_n$ n'existent que pour $n = 6$.
Ils peuvent être obtenus comme image d'un stabilisateur d'un point par un automorphisme non intérieur de $\mathcal{S}_6$, qui est le seul groupe symétrique à posséder des automorphismes extérieurs.

Tournaplat3X3

Tournaplat3X3

Ce casse-tête est en ligne :
`http://mathemouton.free.fr/Magistere/Tournaplat3X3.html`
Les commutateurs de deux mouvements diagonalement opposés sont des 3-cycles.
Pour espérer obtenir une transposition (qui est impaire) on compose avec un autre mouvement (4-cycle donc impair).
Après tâtonnements, on trouve une transposition.

$T_{3,3}$

Pour décrire les mouvements, on utilise, de gauche à droite et de haut en bas, les lettres α β, γ, δ.
On voit que $\overline{\alpha}\delta\alpha\overline{\delta}\overline{\gamma}$ effectue une transposition.
Par conjugaison, on obtient facilement n'importe quelle transposition, donc

$$T_{3,3} = \mathcal{S}_9.$$

Pyraplat4

Pyraplat4

Ce casse-tête est en ligne (en choisissant $N = 4$) :
http://mathemouton.free.fr/Magistere/Pyraplat.html
Avec des notations évidentes, on note **G**, **D**, **H**, **B** les mouvements de rotation, dans le sens des aiguilles d'une montre des quatre faces colorées.
On note aussi **E** la rotation de la face grise, aussi dans le sens des aiguilles d'une montre, mais quand on regarde la pyramide par en-dessous.

Formules magiques

Essayez sur la configuration initiale (bouton I) :

- $F_1 = \mathbf{G\,D\,\overline{G}\,\overline{D}}$
- $F_2 = \mathbf{\overline{H}\,\overline{B}\,H\,B}$
- $F_3 = \mathbf{\overline{B}\,\overline{H}\,B\,H\,G\,D\,\overline{G}\,\overline{D}}$
- $F_4 = \mathbf{D\,\overline{G}\,\overline{D}\,G}$
- $F_5 = \mathbf{D\,\overline{G}\,\overline{D}\,G\,E\,\overline{B}\,H\,B\,\overline{H}\,\overline{E}}$
- $F_6 = \mathbf{B\,E\,\overline{B}\,E\,B\,E\,\overline{B}\,E\,B\,E}$
- $F_7 = \mathbf{\overline{B}\,\overline{G}\,\overline{H}\,E\,D\,\overline{E}\,H\,G\,\overline{B}}$

Méthode

Pour retrouver la configuration initiale, une méthode est donc de

- Placer un maximum d'arêtes bien orientées “à la main” ;

Méthode

Pour retrouver la configuration initiale, une méthode est donc de

- Placer un maximum d'arêtes bien orientées “à la main” ;
- À la fin, il reste les arêtes d'une face colorée à placer et orienter. Si un tour de cette face ne suffit pas on se ramène à une transposition d'arêtes par F_6. Il se peut qu'il y ait encore deux arêtes mal orientées et on utilise F_7 ;

Méthode

Pour retrouver la configuration initiale, une méthode est donc de

- Placer un maximum d'arêtes bien orientées “à la main” ;
- À la fin, il reste les arêtes d'une face colorée à placer et orienter. Si un tour de cette face ne suffit pas on se ramène à une transposition d'arêtes par F_6. Il se peut qu'il y ait encore deux arêtes mal orientées et on utilise F_7 ;
- On place les sommets avec les formules F_1 et/ou F_2 et/ou F_4 ;

Méthode

Pour retrouver la configuration initiale, une méthode est donc de

- Placer un maximum d'arêtes bien orientées “à la main” ;
- À la fin, il reste les arêtes d'une face colorée à placer et orienter. Si un tour de cette face ne suffit pas on se ramène à une transposition d'arêtes par F_6. Il se peut qu'il y ait encore deux arêtes mal orientées et on utilise F_7 ;
- On place les sommets avec les formules F_1 et/ou F_2 et/ou F_4 ;
- On oriente les sommets avec F_3 et/ou F_5.

Actions de P_4

Exercice : on peut déduire de la construction précédente une minoration de son cardinal.
Les actions de P_4 sur les 5 sommets et les 8 arêtes fournissent un *morphisme des placements*.

$$\phi_p : P_4 \longmapsto \mathcal{S}_5 \times \mathcal{S}_8$$

On considère les groupes *des placements* et *des orientations*

$$G_P = \mathrm{Im}(\phi_p), \quad G_o = \ker(\phi_p)$$

et on a

$$P_4 \big/ G_o \simeq G_p.$$

G_p

Les formules précédentes permettent de prouver que $\widetilde{\mathcal{A}_5} = \mathcal{A}_5 \times \{1\}$ et $\widetilde{\mathcal{A}_8} = \{1\} \times \mathcal{A}_8$ sont deux sous-groupes de G_p et que leur produit direct $\mathcal{A}_5 \times \mathcal{A}_8$ est strictement contenu dans G_p, donc d'indice 2 ou 4 dans ce dernier. Par ailleurs les éléments de G_p ont tous un produit des deux signatures (celle dans $\mathcal{S}_5$ et celle dans $\mathcal{S}_8$) égal à 1, puisque ce produit est un morphisme et la propriété est vraie pour les mouvements élémentaires, donc $G_p \neq \mathcal{S}_5 \times \mathcal{S}_8$.
Ainsi, $\mathcal{A}_5 \times \mathcal{A}_8$ est d'indice 2 dans G_p,

G_p

D'une part, étant d'indice 2, $\mathcal{A}_5 \times \mathcal{A}_8 \lhd G_p$.
D'autre part, en notant $f_6 \in P_4$ l'élément correspondant à la formule F_6, on remarque que $\phi_p(f_6^3)$ est un élément de $G_p \setminus \mathcal{A}_5 \times \mathcal{A}_8$ d'ordre 2.
Cela assure que

$$G_p \simeq (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \ltimes (\mathcal{A}_5 \times \mathcal{A}_8)$$

G_o et P_4

À l'aide d'invariants assez simples, on peut montrer que

$$G_o \simeq (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^7 \times (\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})^4$$

Puis on peut construire une section de ϕ_p, ce qui prouve finalement que

$$P_4 \simeq G_p \ltimes G_o \simeq \left((\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \ltimes (\mathcal{A}_5 \times \mathcal{A}_8)\right) \ltimes \left((\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^7 \times (\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})^4\right).$$