

Point de vue hyperbolique sur le comportement  
asymptotique des fonctions harmoniques  
et  
Analyse globale des données environnementales

Frédéric Mouton

**Mémoire pour l'habilitation à diriger des recherches**

Soutenance le 13 décembre 2010 à l'Institut Fourier devant

Gérard Besson (Institut Fourier, Université Grenoble I)

Gilles Courtois (Université Paris VI)

Jean-Michel Jaquet (Université de Genève)

Hervé Pajot (Institut Fourier, Université Grenoble I)

Marc Peigné (Université de Tours)

Clémentine Prieur (IMAG, Université Grenoble I)

au vu des rapports de

Sa'ar Hersensky (University of Georgia)

Jean-Michel Jaquet

James Kossin (NOAA/University of Wisconsin-Madison)

Clémentine Prieur



*à l'Amour, à jamais mon unique source d'énergie.*

*À nous de choisir une direction qui permette,  
malgré et grâce à l'infinitude de cette énergie,  
une convergence harmonieuse.*



*Comme on peut le voir dans ce mémoire, mon parcours mathématique a été assez mouvementé et je tiens à remercier du fond du cœur les collègues présents aux étapes décisives.*

*Gérard Besson a été d'un conseil avisé et d'un soutien sans faille, depuis mon stage de DEA jusqu'à cette soutenance. Il a même été jusqu'à slalomer moins rapidement pour améliorer ma confiance en moi.*

*Les probabilistes grenoblois ont toujours été à mes côtés, comme Jean Brossard, à qui mes travaux sur le comportement asymptotique des fonctions harmoniques doivent beaucoup, et Christophe Leuridan, qui s'est intéressé à mes travaux sur les arbres.*

*Pierre de la Harpe et Jean-Claude Hausmann m'ont accueilli chaleureusement à la section de maths de l'université de Genève. L'ambiance dans l'équipe des assistants y était formidable et j'y ai noué de fortes amitiés, notamment avec Goulmira Arjantseva, Pierre-Alain Chérix, Luc Guyot et Wolfgang Pitsch.*

*Antoine Gualtierotti m'a donné le goût des statistiques et plus généralement de l'analyse de données. J'ai beaucoup appris en travaillant avec lui.*

*Les membres du GRID m'ont permis de concrétiser ce goût dans une ambiance à la fois très dynamique et très amicale. Merci en particulier à Hy Dao qui m'a accueilli, à Pascal Peduzzi qui m'a invité à participer au projet GRAVITY et à mes deux très proches collaborateurs Ola Nordbeck et Christian Herold.*

*De retour à Grenoble, Hervé Pajot et Didier Piau m'ont encouragé à donner un cours de M2R et à prendre Jérôme Carbini en stage. C'était sans aucun doute une étape cruciale vers cette habilitation. L'année suivante, Hervé m'a proposé de co-diriger la thèse de Camille Petit. J'ai beaucoup appris en dirigeant Jérôme et Camille et travailler avec eux a été très agréable.*

*Plus généralement, j'ai beaucoup apprécié l'ambiance impulsée à Grenoble par les nouveaux collègues, qui s'est confirmée au fil des recrutements et des sorties sportives (escalade et pétanque) et culturelles (j'aime bien les "films"). J'apprécie aussi énormément le gang des thésards, formé pour partie d'anciens élèves de prépa-agreg. Merci aux collègues administratifs avec qui j'ai toujours eu d'excellents rapports.*

*Merci pour leur patience à mes deux collaborateurs mathématiciens Roland Bacher et Frédéric Mathéus.*

*Merci à tous les membres du GIRI et particulièrement à Marie-Laure pour ses encouragements.*

*Merci à ma famille et à mes proches pour leur soutien essentiel, avec une pensée particulière pour Olivier.*

*Merci enfin à ceux qui interviennent à la fin de ce parcours : à Michel Brion de m'avoir conseillé au long des différentes étapes de cette habilitation ; à Jean-Michel Jaquet et Clémentine Prieur d'avoir accepté de faire des rapports et de prendre part au jury ; à Gilles Courtois, Hervé Pajot et Marc Peigné de participer au jury.*

*Special thanks to Sa'ar Hersensky and Jim Kossin, who accepted to report on my works but are unfortunately not able to celebrate with us in Grenoble !*



## Résumé/Abstract

Maître de conférence depuis 1994, avec une période de mobilité de 6 ans à l'université de Genève, mes recherches suivent deux axes principaux.

Le premier, en mathématiques fondamentales, concerne les liens entre analyse et géométrie dans des espaces hyperboliques au sens large à l'aide d'outils probabilistes, notamment l'étude asymptotique des fonctions harmoniques. J'ai développé ces dernières années un **encadrement doctoral** dans ce domaine (cours de M2R, stage de M2R, doctorat).

Le second consiste en applications de l'outil statistique à des études concernant des données environnementales et sociales au niveau mondial. Cet axe a été particulièrement développé lors de mon séjour genevois grâce à de multiples collaborations avec le Programme des Nations Unies pour l'Environnement (UNEP) et le Programme des Nations Unies pour le Développement (UNDP). Une contribution concerne la participation à l'élaboration d'un indicateur de la vulnérabilité des populations aux catastrophes naturelles, le *Disaster Risk Index*, analogue pour les catastrophes naturelles du célèbre *Human Development Index*, permettant à l'UNDP de cibler au mieux ses aides et susceptible d'être utilisé dans les nouvelles études sur le sujet. Une autre concerne l'élaboration d'une carte mondiale d'aléas d'inondations.

Being *Maître de Conférences* at Grenoble since 1994, with a 6 year period at the University of Geneva, my research follows two principal axes.

The first axe, in fundamental mathematics, considers links between analysis and geometry in spaces that are hyperbolic in a wide sense, using probabilistic methods. I studied mainly the asymptotic behavior of harmonic functions, gave a master course concerned with these topics and have now a PhD student (in co-direction) about this subject.

The second axe consists of applications of statistical tools to socio-environmental studies at the global level. It has been especially developed during the Swiss period, thanks to several collaborations with the United Nations Environment Programme (UNEP) and the United Nations Development Programme (UNDP). A major part of these collaborations is concerned with the elaboration of an index measuring the vulnerability of populations to natural hazards. That *Disaster Risk Index*, inspired by the famous *Human Development Index*, is intended to help UNDP to adapt their actions and to be used in further studies on the subject. Another part is concerned with the elaboration of a global flood map.



# Table des matières

<b>Préambule</b>	<b>9</b>
<b>Liste de publications pour l'habilitation à diriger des recherches</b>	<b>11</b>
Mathématiques fondamentales . . . . .	11
Applications . . . . .	11
Publications issues de la thèse . . . . .	12
<b>1 Fonctions harmoniques et géométrie hyperbolique</b>	<b>13</b>
1.1 Présentation générale . . . . .	13
1.1.1 La convergence non-tangentielle dans le cadre euclidien . . . . .	13
1.1.2 Énoncés des critères . . . . .	14
1.1.3 Un point de vue géométrique . . . . .	16
1.1.4 Choix de la méthode probabiliste . . . . .	16
1.1.5 La stratégie . . . . .	17
1.2 Le cas des variétés . . . . .	17
1.2.1 Bord(s) à l'infini . . . . .	18
1.2.2 Résultats non-tangentiels . . . . .	18
1.2.3 Conditionnement et résultats stochastiques . . . . .	20
1.2.4 Un lemme géométrique . . . . .	21
1.2.5 Inégalités de Harnack . . . . .	22
1.2.6 Suites de boules non-tangentielles . . . . .	23
1.2.7 Idées des preuves . . . . .	24
1.3 Le cas des arbres . . . . .	27
1.3.1 Cadre discret . . . . .	28
1.3.2 Notions radiales et non-tangentielles . . . . .	28
1.3.3 Un premier résultat stochastique . . . . .	29
1.3.4 Résultats . . . . .	30
1.3.5 Simple connexité et uniformité . . . . .	31
1.3.6 Éléments de preuve . . . . .	32
1.4 Le cas des groupes hyperboliques (C. Petit) . . . . .	36

<b>2</b>	<b>Analyse spatiale et statistique des données environnementales : une approche globale des catastrophes naturelles</b>	<b>39</b>
2.1	Analyse globale des données environnementales . . . . .	40
2.1.1	Le GRID/Europe . . . . .	40
2.1.2	L'analyse des données géoréférencées . . . . .	40
2.1.3	Qualité des données globales . . . . .	42
2.1.4	Attentes et limites de l'approche globale . . . . .	43
2.2	Concept du <i>Disaster Risk Index</i> . . . . .	43
2.2.1	Le projet GRAVITY . . . . .	44
2.2.2	Le <i>Disaster Risk Index</i> . . . . .	44
2.3	Le cas des cyclones . . . . .	46
2.3.1	Construction de la base de données globale . . . . .	47
2.3.2	Modèle stationnaire . . . . .	47
2.3.3	Modèle dynamique, zones-tampon latérales . . . . .	48
2.3.4	Des zones-tampon latérales aux zones-tampon des trajectoires . . . . .	52
2.4	Carte mondiale des crues exceptionnelles . . . . .	53
2.4.1	Présentation . . . . .	53
2.4.2	Données . . . . .	54
2.4.3	Organisation générale . . . . .	56
2.4.4	Première analyse spatiale . . . . .	56
2.4.5	Analyse statistique . . . . .	58
2.4.6	Deuxième analyse spatiale . . . . .	61
2.4.7	Conclusion . . . . .	62
<b>3</b>	<b>Autres travaux</b>	<b>63</b>
3.1	Triangulations de polygones . . . . .	63
3.2	Vitesses de fuite . . . . .	64
3.3	Travaux divers . . . . .	64
3.3.1	Survol des groupes automatiques . . . . .	64
3.3.2	Modélisation des transports . . . . .	64
3.3.3	Anesthésiologie . . . . .	65
	<b>Bibliographie</b>	<b>67</b>

# Préambule

Rédiger ce préambule est une gageure. C'est en effet l'endroit où l'on doit, je suppose, justifier par une habile rhétorique, le plus souvent *a posteriori*, la cohérence de sa trajectoire scientifique. Il ne devrait y avoir de place ici ni pour le hasard, ni pour la fantaisie. Si l'on compare la recherche au creusage de trous pour trouver des objets intéressants, on est censé creuser au même endroit pour obtenir un trou de plus en plus profond. Les changements de direction pour éviter un obstacle ou pour aller dans une direction plus féconde sont justifiables. Une autre opération risquée mais valorisée est celle de commencer un trou non loin de là en espérant faire communiquer les deux trous un jour.

Ce n'est évidemment pas le cas ici. Nul tunnel n'est possible entre l'étude asymptotique des fonctions harmoniques sur des variétés et l'étude de la vulnérabilité des populations aux catastrophes naturelles. Je n'essaierai donc pas de faire croire qu'on peut en creuser un. Je me contenterai de décrire les circonstances qui ont amené à un tel état de fait.

Si l'on considère le premier trou, on voit déjà une évolution du monde continu vers le monde discret qui était prémonitoire. Si les mathématiques m'ont attiré au début par leur abstraction et leur déconnexion du monde réel, je me suis assez vite aperçu que cette abstraction menait aussi à un isolement. Parmi ses voisins de bureau, combien sont capables de comprendre vraiment ce que fait un mathématicien fondamental ? Au mieux, il arrivera, en vulgarisant, à faire passer quelques subtilités aux gens travaillant dans son thème. Le travail sur les arbres que j'ai effectué était déjà une conséquence de ce fait : je voulais que les probabilistes puissent comprendre ma démarche. J'ai aussi mis beaucoup d'énergie (et j'en mets encore beaucoup) dans différentes actions de vulgarisation, pour combattre cet isolement. Par ailleurs, les objets discrets m'ont paru plus concrets. Je voulais pouvoir construire plus aisément des exemples, éventuellement représenter des objets sur une machine. Bref, je devenais un mathématicien constructiviste, ou plutôt effectif comme on dit maintenant. Cet aspect-là est très visible dans les travaux en cours décrits dans la dernière partie, où l'on voit apparaître combinatoire, algorithmes, et calculs approchés.

Mon premier contact avec les applications est, lui, dû à deux concours de circonstances. D'abord j'ai eu envie d'un changement d'air mathématique et j'ai pris temporairement un poste à l'université de Genève. Il se trouve qu'on me demandait d'enseigner des statistiques et j'en ai donc appris quelques bases. Le deuxième pas est, lui aussi,

dû au hasard. J'animais avec des collègues une journée de présentation des disciplines de l'université aux futurs étudiants (l'équivalent de notre journée du lycéen). Lors d'une pause, je visitais les stands des autres disciplines lorsque je suis tombé sur un stand présentant un certificat de troisième cycle de *géomatique environnementale* (j'explique un peu à quoi correspondent ces termes dans la deuxième partie). J'avais toujours été fasciné par les images satellites et ai donc commencé à discuter. L'année d'après, je passais ce certificat et effectuais mon mémoire au GRID/Europe, un bureau de l'ONU dépendant du Programme de Nations Unies pour l'Environnement. Les projets et l'ambiance très dynamique que j'ai rencontrés là, qui ne correspondent à vrai dire pas vraiment au stéréotype onusien, m'ont encouragé à développer une convention avec la section de mathématiques où j'avais mon poste, pour que je puisse y travailler partiellement. Le rythme des projets était assez soutenu et la priorité était à la production concrète, non à la publication scientifique. Cela explique par exemple, sans l'excuser, que le travail sur les cyclones ne soit pas publié dans une revue scientifique. Ce fait a étonné récemment un des spécialistes du milieu qui construit lui aussi une base de données globale des cyclones. Le côté le plus novateur des travaux effectués par le GRID me semble être l'approche globale, que je décris dans la deuxième partie.

Par ailleurs, j'ai développé, depuis mon retour à Grenoble, une composante d'encadrement doctoral. J'ai d'abord effectué un cours de M2R et encadré un mémoire. Un an plus tard, Hervé Pajot m'a proposé de co-encadrer la thèse de Camille Petit. Je présente certains de ses résultats à la fin de la première partie.

# Liste de publications pour l'habilitation à diriger des recherches

Les ouvrages sont numérotés suivant la bibliographie globale située en fin de document et correspondent donc aux références faites dans le texte.

Ils sont disponibles sur ma page web : <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~mouton/>

## Mathématiques fondamentales

- [1] MOUTON F., *Comportement asymptotique des fonctions harmoniques sur les arbres*, Séminaire de Probabilités XXXIV, Lecture Notes in Mathematics, Springer, **1729** (2000) 353–373 ;
- [2] MOUTON F. *Local Fatou theorem and the density of the energy on manifolds of negative curvature*, Revista de Matematica Iberoamericana, **23** (2007), no 1, 1–16 ;
- [3] MOUTON F. *Non-tangential, radial and stochastic asymptotic properties of harmonic functions on trees*, soumis à Electronic Communications in Probabilities ;
- [4] BACHER R., MOUTON F. *Triangulations of Nearly Convex Polygons*, preprint.

## Applications

- [5] PEDUZZI P., DAO H., HEROLD C., MOUTON F., *Global Risk And Vulnerability Index Trends per Year (GRAVITY), Phase II : Development, analysis and results*, (2002), UNEP/UNDP, 56 p. ;
- [6] MOUTON F., NORDBECK O. *Cyclone Database Manager, A tool for converting point data from cyclone observations into tracks and windspeed profiles in a G.I.S.*, Project for Risk Evaluation, Vulnerability, Information and Early Warning, (2002), UNEP/GRID-GENEVA and Université de Genève, Département de Géographie, 40 p. ;
- [7] GUALTIEROTTI A.F., MOUTON F., de ROSSI F.X., *La modélisation des transports : le cas des comptages routiers*, (2002), Office Féd. de la Statistique, 213 p. ;
- [8] PEDUZZI P., DAO H., HEROLD C., MOUTON F., *Global Risk And Vulnerability Index Trends per Year (GRAVITY), Phase III : Development, analysis and results*, (2003), UNDP, 29 p. ;
- [9] Contributor in PEDUZZI P., DAO H. *Global Risk And Vulnerability Index Trends per Year (GRAVITY), Phase IV : Annexe to WVR and Multi Risk Integration*, (2003), UNEP, 45 p. ;
- [10] Membre du Statistical Team pour *REDUCING DISASTER RISK, a challenge for Development*, (2004), UNDP, New York, 146 p. ;

- [11] CAHANA A., GAUDET J., MOUTON F., WEIBEL H., MAVROCORDATOS P., *Validation of the French Version of the “ASA Nine Outcome Measure Questionnaire” (ASA 9Q) in a University Based Interventional Pain Unit*, American Society of Anesthesiologists Annual Meeting Abstracts, A-1366, 2004 ;
- [12] HEROLD C., MOUTON F., *Statistical estimates of peak-flow magnitude*, (2006), World Bank Development Research Group - UNEP/GRID-Europe, 37 p. ;
- [13] PEDUZZI P., DAO H., HEROLD C. and MOUTON F., *Assessing global exposure and vulnerability towards natural hazards : the Disaster Risk Index*, Nat. Hazards Earth Syst. Sci., 9, 1149-1159, 2009 ;
- [14] Participation au *Global assessment report on disaster risk reduction (2009)*, United Nations International Strategy for Disaster Reduction Secretariat, 207 p. ;
- [15] PEDUZZI P., CHATENOUX B., DAO H., DE BONO A., DEICHMANN U., GIULIANI G., HEROLD C., KALSNES B., KLUSER S., LOVHOLT F., LYON B., MASKREY A., MOUTON F., NADIM F., SMEBYE H., *The Global Risk Analysis for the 2009 Global Assessment Report on Disaster Risk Reduction*, Extended abstract for International Disaster and Risk Conference, Davos, Switzerland, 2010 ;
- [16] HEROLD C., MOUTON F., *Global flood hazard mapping using statistical peak-flow estimates*, preprint.

## **Publications issues de la thèse**

- [17] MOUTON F., *Groupes automatiques et courbure négative*, Sémin. de théorie spectrale et géométrie, 8 :37–52, 1989-90 ;
- [18] MOUTON F., *Convergence non-tangentielle des fonctions harmoniques en courbure négative*, Thèse de Doctorat, Grenoble, 1994 ;
- [19] MOUTON F., *Comportement asymptotique des fonctions harmoniques en courbure négative*, Comment. Math. Helvetici, **70** (1995), 475–505.

# Chapitre 1

## Fonctions harmoniques et géométrie hyperbolique

### 1.1 Présentation générale

Depuis un siècle et le théorème de Fatou, on étudie la convergence radiale ou non-tangentielle des fonctions harmoniques. On s'est progressivement aperçu que les différents critères d'une telle convergence exprimés dans le disque ou le demi-espace euclidiens s'expriment plus naturellement dans la métrique hyperbolique (de courbure  $-1$ ). Par ailleurs, depuis les années 70, une nouvelle approche de ces critères initiée par Jean Brossard et basée sur l'utilisation du mouvement Brownien est apparue. L'alliance de la géométrie et des probabilités a permis de démontrer des critères de convergence non-tangentielle d'abord dans les variétés de courbure négative, puis dans le cas discret des arbres et très récemment dans le cas des groupes hyperboliques (Camille Petit).

#### 1.1.1 La convergence non-tangentielle dans le cadre euclidien

L'étude de la convergence non-tangentielle des fonctions harmoniques a commencé au début du XX-ème siècle avec le théorème de Fatou [47] : une fonction harmonique positive sur le disque unité admet en presque tout point  $\theta$  du bord (pour la mesure de Lebesgue) une *limite non-tangentielle* finie, c'est-à-dire une limite dans tout cône de sommet  $\theta$  et d'angle strictement inférieur à  $\pi/2$  (voir figure 1.1).

Ce théorème était global (hypothèse de positivité, conclusion) et il était naturel de chercher des conditions pouvant entraîner la convergence non-tangentielle en des points donnés, sous des conditions locales. De tels critères ne pouvaient être vrais qu'à un ensemble de mesure nulle près, étant donné que même la positivité globale n'entraînait pas l'existence de limites non-tangentielles en tout point. Par ailleurs il était aussi naturel d'étendre le résultat en dimension quelconque et pour des questions pratiques, il était plus commode de considérer le demi-espace euclidien.

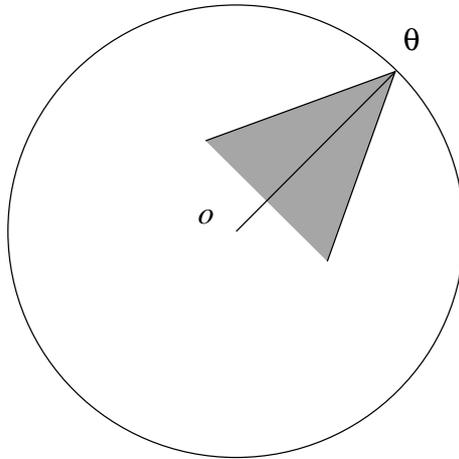


FIGURE 1.1 – Convergence non-tangentielle

Le premier critère de convergence est la *bornitude non-tangentielle*, ce qui fut prouvé en 1916 par I.I. Privalov dans le cas du disque [63] et en 1950 par A.P. Calderón dans le cas du demi-espace [33], la *positivité* étant suffisante comme l’a remarqué plus tard L. Carleson [34].

Un autre critère est la finitude de *l’intégrale d’aire*, appelée aussi *intégrale de Lusin*. Ce critère a été prouvé en dimension 2 par le résultat de J. Marcinkiewicz et A. Zygmund [56] (1938) d’une part et celui de D.C. Spencer d’autre part [65](1943), puis en dimension supérieure par les résultats de A.P. Calderón [32] (1950) et E.M. Stein [66] (1961).

Dans les années 80, R.F. Gundy et M.L. Silverstein ont introduit la notion de *densité de l’intégrale d’aire* [49] et un critère correspondant a été montré peu après par J. Brossard [31] par des méthodes probabilistes.

### 1.1.2 Énoncés des critères

Nous allons maintenant énoncer en détail ces différents critères dans le cas du demi-espace  $\mathbf{R}^V \times \mathbf{R}_+^*$ . Les points de cet espace seront notés  $z = (x, y)$  et si  $\theta$  est un point du bord  $\mathbf{R}^V$ , le cône basé en  $\theta$ , d’axe “vertical”, d’angle  $\alpha$  et tronqué à hauteur 1 sera noté  $\Gamma_\alpha^\theta$  (voir figure 1.2).

Les deux premiers critères sont rassemblés dans le théorème suivant :

#### **Théorème 1.1.1** (Calderón-Stein)

Soit  $u$  une fonction harmonique sur  $\mathbf{R}^V \times \mathbf{R}_+^*$ . Pour presque tout point  $\theta$  du bord (pour la mesure de Lebesgue), les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i). Pour tout  $\alpha < \pi/2$ ,  $u(z)$  admet une limite lorsque  $z$  tend vers  $\theta$  en restant dans  $\Gamma_\alpha^\theta$  ;
- (ii). Pour tout  $\alpha < \pi/2$ , la fonction  $u$  est bornée sur  $\Gamma_\alpha^\theta$  ;

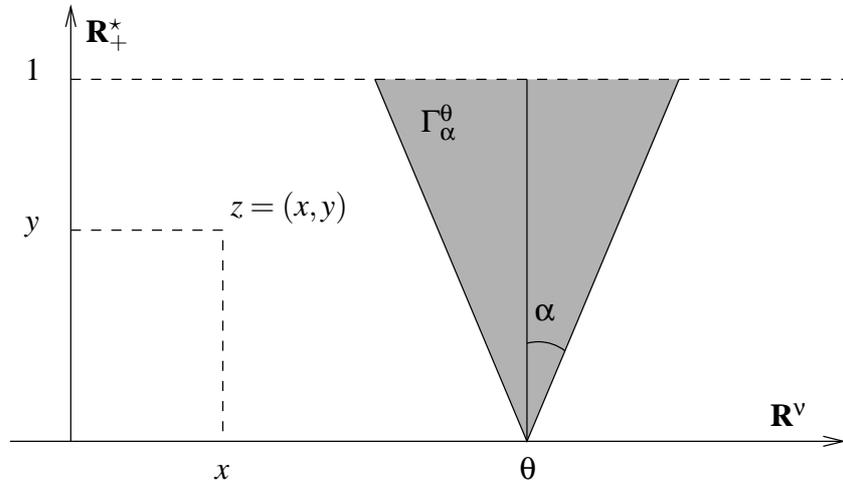


FIGURE 1.2 – Convergence non-tangentielle dans le demi-espace

(iii). Pour tout  $\alpha < \pi/2$ , l'intégrale d'aire est finie :

$$\int_{\Gamma_\alpha^\theta} |\nabla u(x,y)|^2 y^{1-\nu} dx dy < +\infty.$$

Remarquons qu'en remplaçant, dans ces propriétés, le quantificateur universel par le quantificateur existentiel, on obtient des propriétés non seulement équivalentes entre elles mais aussi équivalentes à celles ci-dessus, toujours à un ensemble de mesure nulle près.

Ce théorème a été redémontré par la suite par J. Brossard par des méthodes probabilistes utilisant mouvement brownien et martingales [29, 30]. Les travaux décrits ici doivent beaucoup à cette approche.

La densité de l'intégrale d'aire est, quant à elle, définie par les formules

$$D_\alpha^r(\theta) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_\alpha^\theta} y^{1-\nu} \Delta |u - r|(dz) = \int_{\Gamma_\alpha^\theta} y^{1-\nu} |\nabla u(z)| \sigma_r(dz),$$

où  $\sigma_r$  est la mesure d'hypersurface de l'ensemble de niveau  $\{u = r\}$ . Le dernier critère s'énonce alors ainsi :

**Théorème 1.1.2** (Brossard)

Soit  $u$  une fonction harmonique sur  $\mathbf{R}^\nu \times \mathbf{R}_+^*$  et  $\alpha < \pi/2$ . Pour presque tout point  $\theta$  du bord (pour la mesure de Lebesgue), les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i).  $u(z)$  admet une limite lorsque  $z$  tend vers  $\theta$  en restant dans  $\Gamma_\alpha^\theta$ ;
- (ii).  $\sup_r D_\alpha^r(\theta) < +\infty$ ;
- (iii).  $D_\alpha^0(\theta) < +\infty$ .

### 1.1.3 Un point de vue géométrique

Depuis plus de trente ans, on a remarqué que les objets ci-dessus s'exprimaient plus simplement si on munissait le demi-espace de la métrique de Poincaré, ce qui est encore plus troublant en dimension 2 où les fonctions harmoniques euclidiennes et hyperboliques coïncident.

Pour commencer, le bord devient le bord "à l'infini" (ou bord géométrique), les rayons deviennent des rayons géodésiques (géodésiques paramétrées par  $[0, +\infty[$ ) et les cônes deviennent des voisinages tubulaires de rayons géodésiques. La convergence non-tangentielle est donc fortement liée à la géométrie de l'espace et le théorème de Fatou a d'ailleurs été progressivement prouvé dans de nombreux cadres : ouverts lipschitziens, espace hyperbolique, variétés riemanniennes simplement connexes de courbure négative pincée [24, 20], groupe libre [44, 38], arbres [35], graphes hyperboliques au sens de Gromov [21].

Contrairement au théorème de Fatou, les critères ponctuels ont été assez peu développés dans d'autres cadres que le demi-espace euclidien. L'intégrale d'aire reçoit cependant une expression plus simple et naturelle, puisqu'elle devient l'intégrale d'un gradient au carré, c'est-à-dire une énergie [19] :

$$\int_{\Gamma_\alpha^\theta} |\nabla u(x, y)|^2 y^{1-\nu} dx dy = \int_{\Gamma_\alpha^\theta} |\nabla_{hyp} u|_{hyp}^2 dv_{hyp}.$$

Pourtant, les seuls travaux sur l'intégrale d'aire dans un cadre non-euclidien étaient ceux d'A. Korányi et R.B. Putz sur les espaces symétriques [53, 54] (qui utilisent fortement la structure algébrique du groupe d'isométrie de l'espace considéré). La densité de l'intégrale d'aire perd elle aussi le terme en  $y$ , mais n'avait jamais été considérée dans un cadre non-euclidien.

### 1.1.4 Choix de la méthode probabiliste

Cependant, même si les critères s'expriment naturellement dans un cadre géométrique, il n'en va pas de même des démonstrations originales de ces critères qui utilisent des formules très explicites et des méthodes spécifiques au cadre euclidien.

Les démonstrations probabilistes ultérieures semblaient beaucoup plus flexibles et adaptables. Elles reposent sur l'introduction d'une notion de convergence de la fonction harmonique le long des trajectoires browniennes. Pour comparer cela à la convergence non-tangentielle, il faut pouvoir conditionner le mouvement brownien à sortir en un point donné du bord, ce qui se fait par la méthode des  $h$ -processus de Doob. Cette méthode fonctionne dans le cas du bord de Martin, bord défini par la théorie du potentiel à l'aide des fonctions de Green. Il en résulte que ces méthodes probabilistes n'ont de chances de fonctionner que si on sait relier le bord géométrique qui permet de définir les notions non-tangentielles et le bord de Martin permettant de définir les notions browniennes correspondantes.

On sait que ces deux bords, bord géométrique et bord de Martin, coïncident dans des cadres hyperboliques au sens large : variétés de courbure négative [24, 20], mais aussi arbres [35] et plus généralement graphes hyperboliques au sens de Gromov [21, 22] sous certaines conditions.

### 1.1.5 La stratégie

On se place donc dans le cadre général suivant : on considère un espace géométrique (continu ou discret) “hyperbolique” dans un des sens vus plus haut. La métrique (riemannienne ou discrète) permet de définir la notion de géodésique puis de bord géométrique : on peut donc parler de convergence non-tangentielle. Elle permet aussi de définir l’énergie non-tangentielle et un laplacien qui détermine les fonctions harmoniques. Ce laplacien permet par ailleurs de définir une diffusion (mouvement brownien ou marche aléatoire).

L’“hyperbolicité” entraîne la coïncidence du bord de Martin avec le bord géométrique, ce qui permet de comparer en un point du bord la convergence non-tangentielle d’une fonction harmonique et sa convergence le long des trajectoires aléatoires sortant en ce point, qu’on appelle convergence stochastique. De la même manière, chacun des critères non-tangentiels vus précédemment a un analogue stochastique le long des trajectoires aléatoires.

L’équivalence entre les différentes propriétés stochastiques peut se montrer en général à l’aide des théorèmes de convergence des martingales, mais cela peut être délicat dans le cas discret.

Il se trouve cependant que les propriétés stochastiques ne sont pas équivalentes aux propriétés non-tangentielles en général, comme le montre le contre-exemple de Burkholder et Gundy (voir par exemple [42]), mais on peut tout de même trouver des passerelles qui permettent de démontrer les critères non-tangentiels.

## 1.2 Le cas des variétés

On se place ici dans une variété riemannienne  $M$  (de classe  $C^\infty$  et de dimension  $d \geq 2$ ), complète, simplement connexe et dont la courbure sectionnelle est pincée entre deux constantes strictement négatives :  $0 > -a^2 \geq K \geq -b^2$ . Une telle variété est homéomorphe à la boule ouverte  $B^d$  d’après le théorème de Cartan-Hadamard.

L’opérateur de Laplace-Beltrami est donné en fonction de la métrique par la formule

$$\Delta = \left( -\frac{1}{\sqrt{\det g}} \right) \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( (\sqrt{\det g}) g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$$

et une fonction  $f$  est dite *harmonique* si  $\Delta f = 0$ .

### 1.2.1 Bord(s) à l'infini

D'une part, le *bord géométrique* de  $M$  est défini comme l'ensemble des rayons géodésiques quotienté par la relation d'asymptoticité [45] : deux rayons géodésiques  $\alpha$  et  $\beta$  sont *asymptotes* si  $d(\alpha(t), \beta(t))$  est bornée sur  $[0, +\infty[$ . Ce bord fournit une compactification de  $M$  grâce à la topologie des cônes (ces cônes n'ont rien à voir avec les cônes non-tangentiels du cas euclidien). Comme on a une variété de Cartan-Hadamard, on sait que cette compactification est topologiquement la compactification de la boule ouverte par la sphère  $S^{d-1}$ .

D'autre part, le bord permettant une représentation intégrale des fonctions harmoniques positives est le *bord de Martin*, défini à partir des noyaux de Green [24]. Il fournit aussi une compactification topologique de  $M$ .

Ces deux compactifications coïncident d'après M.T. Anderson et R. Schoen [24]. Ce résultat est aussi un cas particulier des travaux théoriques d'A. Ancona [20] sur lesquels nous reviendrons. Le bord unique ainsi obtenu sera noté  $\partial M$  et la compactification  $\bar{M}$ .

On peut résoudre sur ce bord le *problème de Dirichlet* [68, 23] : toute fonction continue sur le bord se prolonge continûment de manière unique en une fonction harmonique sur  $M$  à l'aide d'une formule intégrale faisant intervenir la famille des *mesures harmoniques*  $\mu = (\mu_x)_{x \in M}$  :

$$\tilde{f}(x) = \int_{\partial M} f(\theta) d\mu_x(\theta).$$

Ces mesures sont toutes équivalentes ce qui fournit une notion de  $\mu$ -négligeabilité pour les parties du bord. Le *noyau de Poisson*, obtenu usuellement comme limite de noyaux de Green normalisés, peut aussi être défini comme dérivée de Radon-Nykodim de mesures harmoniques :  $p_\theta(x) = d\mu_x/d\mu_o(\theta)$ , après choix d'un point base  $o$ .

Cette notion de négligeabilité permet d'énoncer un "théorème de Fatou", démontré par les mêmes auteurs [24, 20] :

**Théorème 1.2.1** *Pour une variété  $M$  vérifiant les hypothèses précédentes, une fonction harmonique positive admet en  $\mu$ -presque tout point du bord  $\partial M$  une limite non-tangentielle.*

La notion de limite non-tangentielle est ici celle annoncée dans la présentation générale et décrite plus précisément dans la sous-section suivante où sont énoncés tous les résultats non-tangentiels que j'ai obtenus pour les variétés.

### 1.2.2 Résultats non-tangentiels

Suite aux remarques précédentes, on appelle *tube (non-tangentiel)* en  $\theta$  de rayon  $c$  l'ensemble

$$\Gamma_c^\theta = \{x \in M \mid d(x, \gamma_\theta) < c\},$$

où  $c > 0$  et  $\gamma_\theta$  est l'unique rayon géodésique joignant  $o$  à  $\theta \in \partial M$ . Nous dirons qu'une fonction  $u$  converge non-tangentielle vers  $l$  en  $\theta$  si pour tout  $c > 0$ ,  $u(z)$  tend vers  $l$  quand  $z$  tend vers  $\theta$  en restant dans  $\Gamma_c^\theta$ .

On peut aussi introduire les autres propriétés non-tangentielle. Nous dirons que la fonction  $u$  est bornée non-tangentielle en  $\theta$  si les restrictions de  $u$  aux tubes  $\Gamma_c^\theta$  sont bornées. Nous appellerons énergie non-tangentielle de la fonction  $u$  sur le tube  $\Gamma_c^\theta$  la quantité

$$J_c^\theta(u) = \int_{\Gamma_c^\theta} |\nabla u|^2 dv_M = \|\nabla u\|_{L^2(\Gamma_c^\theta)}^2,$$

qui correspond à l'intégrale d'aire du cas euclidien. On parle de *finitude de l'énergie non-tangentielle* lorsque l'énergie est finie pour tout  $c > 0$ .

L'objet principal de ma thèse a été la preuve en courbure négative d'un résultat analogue au théorème de Calderón-Stein [18, 19] :

**Théorème 1.2.2** *Pour une fonction harmonique sur  $M$ , convergence non-tangentielle, bornitude non-tangentielle et finitude de l'énergie non-tangentielle sont trois propriétés  $\mu$ -presque partout équivalentes.*

Remarquons que, comme dans le cas euclidien, on peut se restreindre à des tubes de rayon  $c$  fixés et obtenir des propriétés  $\mu$ -presque partout équivalentes entre elles et à celles ci-dessus.

Un peu plus tard, j'ai étendu ce résultat à d'autres opérateurs que le laplacien [19]. Pour cela, on définit l'énergie associée à un opérateur elliptique  $L$  par  $\int L(u^2)$ . On a alors :

**Théorème 1.2.3** *Soit  $L$  un opérateur elliptique adapté et faiblement coercif sur  $M$ , tel que  $L \cdot 1 = 0$  et que la fonction de Green tende vers 0 à l'infini.*

*Alors le théorème précédent s'étend aux fonctions  $L$ -harmoniques (avec la notion d'énergie ci-dessus).*

Il restait aussi la question d'un critère analogue à celui de la densité de l'intégrale d'aire [31]. Pour obtenir un tel critère, il a été pratique de prouver un théorème de Fatou "local", qui a aussi comme corollaire un critère remplaçant la bornitude de  $u$  par une minoration (ou majoration) [2]. Ces deux résultats se sont révélés être conséquences de travaux antérieurs sur la convergence admissible par H. Arai [25, 26], la comparaison avec la convergence non-tangentielle étant due à A. Korányi et P. Cifuentes [37].

Pour les énoncer, nous avons besoin d'une définition : si  $U$  est un ouvert de  $M$  et  $\theta \in \partial M$ , on dit que  $\theta$  est *tangentiel* pour  $U$  si l'ensemble  $\Gamma_c^\theta \setminus U$  est borné pour tout  $c > 0$ . On a alors les résultats :

**Théorème 1.2.4 (Fatou local)** *Soit  $U$  un ouvert de  $M$ . Si  $u$  est une fonction harmonique positive sur  $U$ , pour  $\mu$ -presque tout point  $\theta$  tangentiel pour  $U$ , la fonction  $u$  admet une limite non-tangentielle en  $\theta$ .*

**Corollaire 1.2.5** (*Fatou ponctuel*) Soit  $u$  une fonction harmonique sur  $M$ . Pour  $\mu$ -presque tout point  $\theta$  du bord, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i). La fonction  $u$  converge non-tangentielllement en  $\theta$  ;
- (ii). Pour tout  $c > 0$ ,  $u$  est minorée sur  $\Gamma_c^\theta$  ;
- (iii). Il existe  $c > 0$  tel que  $u$  soit minorée sur  $\Gamma_c^\theta$ .

Ces deux résultats sont utiles dans la preuve du critère de la densité de l'énergie [1] que nous allons maintenant énoncer. Pour une fonction harmonique  $u$  et  $\theta \in \partial M$ , on pose

$$D_c^r(\theta) = -\frac{1}{2} \int_{\Gamma_c^\theta} \Delta |u - r|(dx).$$

On a alors le

**Théorème 1.2.6** Soit  $u$  harmonique sur  $M$  et  $c > 0$ .

Alors  $u$  converge non-tangentielllement en  $\mu$ -presque tout point  $\theta \in \partial M$  tel que  $D_c^0(\theta) < +\infty$ .

Nous allons maintenant évoquer les différents ingrédients, puis les articulations logiques des preuves de ces résultats.

### 1.2.3 Conditionnement et résultats stochastiques

Le mouvement brownien  $(X_t)_t$  est le processus de diffusion associé au laplacien [57, 61], à valeurs dans  $M$ . Avec les hypothèses précédentes sur  $M$ , il n'y a pas d'explosion, c'est-à-dire que le brownien est défini pour tout  $t \in \mathbf{R}_+$ . Pour chaque  $t$ ,  $X_t$  est une variable aléatoire et pour presque tout  $\omega$ ,  $t \mapsto X_t(\omega)$  est une trajectoire continue. Si on considère seulement les trajectoires partant d'un point base  $x$ , on obtient une probabilité  $P_x$ . La loi du brownien est donc donnée par la famille de probabilités  $(P_x)_{x \in M}$ .

Il se produit alors un phénomène crucial observé par J.J. Prat [62] : sous les hypothèses précédentes sur  $M$ ,  $P_x$ -presque sûrement, la trajectoire converge vers un point du bord (lui même variable aléatoire), c'est-à-dire que, pour  $P_x$ -presque tout  $\omega \in \Omega$ , il existe  $\theta \in \partial M$  tel que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} X_t(\omega) = \theta.$$

Si on note  $X_\infty(\omega)$  cette limite, la loi de  $X_\infty$ , loi "de sortie" du brownien, se trouve être la mesure harmonique  $\mu_x$  rencontrée précédemment.

On peut alors conditionner le brownien à sortir par un point donné  $\theta$  du bord, cela par la méthode des  $h$ -processus de Doob [40, 18]. On obtient ainsi des probabilités  $P_x^\theta$ .

Définissons alors les analogues stochastiques des propriétés non-tangentiellles. Soit  $u$  une fonction harmonique. Si on regarde le comportement de  $u$  le long de toutes les

trajectoires browniennes, il y a  $P_x$ -presque sûrement équivalence le long de la trajectoire entre la convergence de  $u$ , sa bornitude et la finitude de l'énergie

$$J^* = \int_0^{+\infty} |\nabla u(X_t)|^2 dt,$$

cela découlant aisément du théorème de convergence des martingales.

Conditionnant le brownien à sortir en un point  $\theta$  du bord, les évènements ci-dessus étant asymptotiques, on obtient que la convergence, la bornitude ou la finitude de l'énergie arrivent chacune avec probabilité 0 ou 1, si on force le brownien à sortir en  $\theta$ . Cela définit donc des notions de *convergence stochastique*, *bornitude stochastique* et *finitude de l'énergie stochastique* en  $\theta \in \partial M$ . On déduit du résultat ci-dessus le

**Lemme 1.2.7** *Pour une fonction  $u$  harmonique sur  $M$ , la convergence stochastique, la bornitude stochastique et la finitude de l'énergie stochastique sont des notions équivalentes en  $\mu$ -presque tout point du bord.*

Rappelons cependant que ces notions ne sont pas presque partout équivalentes aux notions non-tangentielles correspondantes. Il découle de la démonstration du théorème 1.2.2 que les propriétés non-tangentielles entraînent les propriétés stochastiques et on peut remonter ponctuellement des propriétés stochastiques aux propriétés non-tangentielles sous une hypothèse d'uniforme continuité comme on le verra dans le corollaire 1.2.18.

## 1.2.4 Un lemme géométrique

Pour un borélien  $E \subset \partial M$ , on note  $\Gamma_c(E) = \cup_{\theta \in E} \Gamma_c^\theta$  la “tente” s'appuyant sur  $E$  (voir figure 1.3). Le lemme clé suivant a beaucoup de corollaires très utiles. On peut en voir une démonstration très concise dans le cours d'A. Ancona à Saint-Flour ([22]) et détaillée dans ma thèse ([18]).

**Lemme 1.2.8** *Il existe  $\eta > 0$  tel que, pour tout borélien  $E$  de  $\partial M$ , on ait*

$$\forall x \notin \Gamma_c(E), \quad P_x[X_\infty \notin E] \geq \eta.$$

On en a tiré alors le résultat suivant (voir [19]) :

**Corollaire 1.2.9** *Pour  $E$  borélien de  $\partial M$ , on note  $f_E(x) = P_x[X_\infty \in E]$ .*

*Alors, pour tout  $\theta \in \partial M$  tel que  $f_E$  converge non-tangentielllement vers 1,  $\Gamma_c(E)$  contient une “pointe”  $\Gamma_e^\theta \setminus B(o, R)$  de tout tube  $\Gamma_e^\theta$ ,  $e > 0$ .*

*Par ailleurs, cette hypothèse sur  $\theta$  est vérifiée pour  $\mu$ -presque tout  $\theta \in E$ .*

Plus tard, on a introduit la notion de point  $\theta \in \partial M$  tangentiel pour une partie  $U$  de  $M$ , définie par la bornitude de tous les ensembles  $\Gamma_e^\theta \setminus U$ ,  $e > 0$ . On a alors montré ces deux corollaires (voir [2]) :

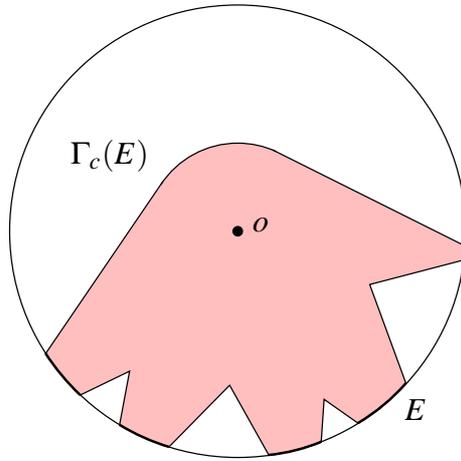


FIGURE 1.3 – L'ensemble  $\Gamma_c(E)$

**Corollaire 1.2.10** *Soit  $U$  un ouvert de  $M$ . Alors, pour  $\mu$ -presque tout  $\theta \in M$  tangentiel pour  $U$ , le mouvement brownien “finit sa vie” dans  $U$  (i.e.  $X_t \in U$  pour  $t$  grand).*

**Corollaire 1.2.11** *Soit  $U$  un ouvert connexe de  $M$  contenant le point base  $o$  et  $\tau$  le temps de sortie de  $U$ .*

*Alors, pour  $\mu$ -presque tout  $\theta$  tangentiel pour  $U$ ,  $P_o^\theta[t = +\infty] > 0$ .*

## 1.2.5 Inégalités de Harnack

On se sert très fréquemment des différentes inégalités de Harnack.

**Théorème 1.2.12** *(Inégalité de Harnack usuelle) Soient  $U$  un ouvert connexe de  $M$  et  $K$  une partie compacte de  $U$ . Il existe alors une constante  $C$  telle que, pour toute fonction  $u$  harmonique positive sur  $U$ , on ait*

$$\sup_K u \leq C \cdot \inf_K u.$$

Pour énoncer la deuxième, il nous faut introduire quelques notations : pour  $x \in M$ ,  $\xi$  un vecteur tangent en  $x$  et un angle  $\alpha$ , on note  $\Lambda(x, \xi, \alpha)$  le cône ouvert (usuel) de sommet  $x$ , direction  $\xi$  et d'angle  $\alpha$ , c'est-à-dire la réunion des rayons géodésiques (ouverts) partant de  $x$  et faisant un angle avec  $\xi$  strictement inférieur à  $\alpha$ . On note  $\bar{\Lambda}(x, \xi, \alpha)$  le cône fermé correspondant. Enfin, on note  $T(x, \xi, \alpha) = \bar{\Lambda}(x, \xi, \alpha) \setminus B(x, 1)$  le cône (fermé) tronqué correspondant. On a alors le

**Théorème 1.2.13** *(Principe de Harnack à l'infini) Pour tout  $\alpha \in ]0, \pi/2[$ , il existe une constante  $C$  telle que pour tout  $(x, \xi) \in TM$  on ait la propriété suivante :*

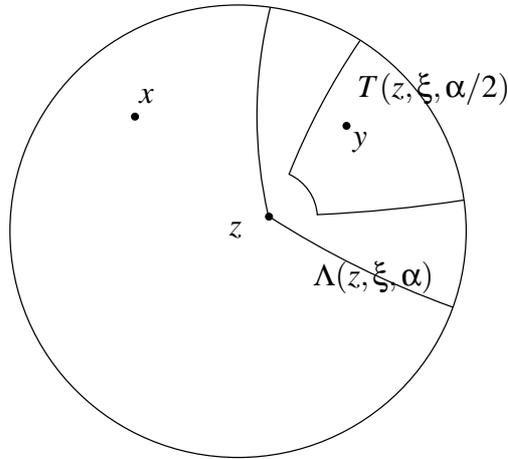


FIGURE 1.4 – Sous-multiplicativité des fonctions de Green

Si  $u$  et  $v$  sont deux fonctions harmoniques strictement positives sur  $\Lambda(x, \xi, \alpha)$  tendant vers 0 à l'infini (pour la topologie de  $\overline{M}$ ), alors

$$\sup_T \frac{u}{v} \leq C \cdot \inf_T \frac{u}{v},$$

où  $T = T(x, \xi, \alpha/2)$ .

Ce principe est le point clé de l'identification entre bord géométrique et bord de Martin [24, 20]. Il nous servira très souvent, surtout dans la formulation en termes de fonctions de Green qu'en a donné A. Ancona [20] :

**Théorème 1.2.14** (*Sous-multiplicativité de fonctions de Green*) Pour tout  $\alpha \in ]0, \pi/2[$ , il existe une constante  $C$  telle que, quels que soient les points  $x, y$  et  $z$  tels qu'on puisse trouver une direction  $\xi$  vérifiant  $x \notin \Lambda(x, \xi, \alpha)$  et  $y \in T(x, \xi, \alpha/2)$  (voir figure 1.4), on ait

$$G(x, y) \leq C \cdot G(x, z)G(z, y).$$

## 1.2.6 Suites de boules non-tangentes

La propriété suivante est démontrée par A. Ancona [22] dans un cadre de théorie du potentiel, mais on en a donné une démonstration probabilistico-géométrique dans [2]. Elle repose sur le principe de Harnack à l'infini.

**Proposition 1.2.15** Soit une suite de boules fermées de rayon fixé dont les centres tendent non-tangentiellement vers un point  $\theta$  du bord, et soit  $x \in M$  (voir figure 1.5).

Alors le mouvement brownien rencontre  $P_x^\theta$ -presque sûrement une infinité de boules de cette suite.

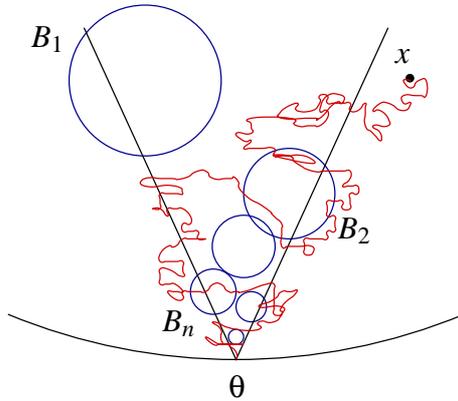


FIGURE 1.5 – Suite de boules non-tangentielle

On en tire trois corollaires fondamentaux :

**Corollaire 1.2.16** Soit  $\Gamma_c^\theta$  un tube non tangentiel en  $\theta \in \partial M$ . Alors  $P_x^\theta$ -p.s., le mouvement brownien rentre et sort de ce tube à des instants arbitrairement proches de l'infini.

**Corollaire 1.2.17** Pour une fonction  $u$  quelconque, s'il y a à la fois convergence non-tangentielle et convergence stochastique en  $\theta$ , alors les limites sont égales.

**Corollaire 1.2.18** Si une fonction quelconque  $u$  admet une limite stochastique  $l$  en  $\theta$  et est uniformément continue sur le tube  $\Gamma_c^\theta$ , alors  $u(x)$  converge vers  $l$  lorsque  $x$  tend vers  $\theta$  en restant dans  $\Gamma_e^\theta$ , cela pour tout sous-tube  $\Gamma_e^\theta$ ,  $e < c$ .

## 1.2.7 Idées des preuves

Pour démontrer le théorème 1.2.2 (critères de la bornitude et de la finitude de l'énergie), comme la convergence entraîne la bornitude, il reste à montrer deux implications.

Pour montrer que la bornitude entraîne la finitude de l'énergie, on considère la réunion  $\Gamma$  des tubes de rayon  $c$  sur lesquels  $|u| \leq n$ . Si  $\tau$  est le temps de sortie de cet ensemble, la propriété de martingale du mouvement brownien assurant que

$$M_t = u^2(X_t) - \int_0^t |\nabla u(X_s)|^2 ds$$

est une martingale locale, un théorème d'arrêt et la convergence monotone fournissent

$$E_0^\theta \left[ \int_0^\tau |\nabla u(X_s)|^2 ds \right] < +\infty.$$

En conditionnant un résultat classique de théorie du potentiel, on transforme cette inégalité en ( $G_\Gamma$  étant la fonction de Green de  $\Gamma$ ) :

$$\int_{\Gamma} |\nabla u(y)|^2 G_\Gamma(o, y) p_\theta(y) dy < +\infty.$$

Pour obtenir une énergie, il reste alors à minorer  $G_\Gamma(o, y) p_\theta(y)$ . Un lemme d'A. Ancona [22], redémontré dans la thèse, permet de comparer dans un tube en  $\theta$ , le noyau de Poisson  $p_\theta$  et la fonction de Green globale  $G(o, \cdot)$ . Pour comparer la fonction de Green de  $\Gamma$  et la fonction de Green globale, on démontre alors le lemme suivant qui a un intérêt propre :

**Lemme 1.2.19** *Soit  $U$  un ouvert de  $M$  contenant un tube  $\Gamma_c^\theta$ . Si on note  $\tau$  le temps de sortie de  $U$ , on a, pour  $e < c$ ,*

$$\lim_{x \rightarrow \theta, x \in \Gamma_e^\theta} \frac{G_U(o, x)}{G(o, x)} = P_o^\theta[\tau = +\infty].$$

Ce lemme repose sur une interversion de limites plutôt délicate à justifier en utilisant plusieurs fois le principe de Harnack à l'infini.

On montre ensuite que la finitude de l'énergie entraîne la convergence en deux étapes : on montre d'abord que l'énergie stochastique est finie, ce qui prouve la convergence stochastique par le lemme 1.2.7, puis on montre une certaine continuité uniforme, ce qui permet de revenir à la convergence non-tangentielle à l'aide du corollaire 1.2.18. Pour passer de l'énergie non-tangentielle à l'énergie stochastique, on introduit la réunion  $\Gamma'$  des tubes de rayon  $c$  sur lesquels l'énergie est bornée par  $n$  et  $\nu$  le prolongement harmonique de l'indicatrice des points à l'infini de  $\Gamma'$ . On considère alors la quantité

$$I_\alpha = E_o \left[ \int_o^{+\infty} |\nabla u(X_t)|^2 \mathbf{1}_{\{\nu \geq \alpha\}}(X_t) dt \right],$$

dont la finitude, pour un quelconque  $\alpha \in ]0, 1[$ , entraîne rapidement la finitude de l'énergie stochastique aux points voulus. Prouver cette finitude est un point délicat qui utilise le principe de Harnack à l'infini et que nous ne détaillerons pas ici. Il reste ensuite à montrer une certaine continuité uniforme ce qui se fait avec la

**Proposition 1.2.20** *Si  $u$  est une fonction harmonique d'énergie non-tangentielle  $J_c^\theta(u)$  finie, alors  $|\nabla u|$  est bornée sur tout sous-tube  $\Gamma_e^\theta$ ,  $e < c$ .*

Cette proposition se démontre à l'aide de la méthode d'itération de De Giorgi-Nash-Moser.

L'extension aux opérateurs coercifs (théorème 1.2.3) ne pose pas de problème particulier, si ce n'est de trouver les bonnes hypothèses et de vérifier que tout se passe bien.

Le théorème de Fatou local (théorème 1.2.4) se démontre aisément à l'aide du corollaire 1.2.11 et du corollaire 1.2.18. On peut supposer sans perte de généralité que  $U$  est

connexe et que  $o \in U$ . Soit  $\tau$  le temps de sortie de  $U$ . Comme  $u$  est harmonique,  $(u(X_t))$  est une martingale locale sur  $[0, \tau[$  et elle converge  $P_o$ -presque sûrement (car elle est positive). Une formule de désintégration de  $P_o$  sur les  $P_o^\theta$  assure que pour  $\mu$ -presque tout  $\theta \in \partial M$ ,  $(u(X_t))$  converge  $P_o^\theta$ -presque sûrement. Le lemme 1.2.11 entraîne donc que pour  $\mu$ -presque tout  $\theta$  tangentiel pour  $U$ ,

$$P_o^\theta[\tau = +\infty \text{ et } (u(X_t)) \text{ converge}] > 0.$$

On se fixe alors un  $\theta$  vérifiant ces deux conditions. On prolonge la fonction  $u$  en  $\tilde{u}$  en lui donnant la valeur 0 hors de  $U$ . La probabilité précédente étant non nulle,  $(\tilde{u}(X_t))$  converge lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$  avec probabilité  $P_o^\theta$  positive, puis égale à 1 par la loi 0 – 1 asymptotique. On a donc convergence stochastique de  $\tilde{u}$ , puis de  $f = \ln(\tilde{u} + 1)$ , au point  $\theta$ .

Par ailleurs,  $u + 1$  est harmonique et positive sur  $U$  et une version infinitésimale de l'inégalité de Harnack (Cheng-Yau, [36]) assure que  $\ln(u + 1)$ , puis  $f$ , est uniformément continue sur  $\Gamma = \Gamma_{c+1}^\theta \setminus B(o, R)$  pourvu que  $R$  soit choisi tel qu'un  $\eta$ -voisinage de  $\Gamma$  soit inclus dans  $U$  ( $\eta > 0$ ), ce qui est possible car  $\theta$  est tangentiel pour  $U$ . Le corollaire 1.2.18 assure enfin la convergence non-tangentielle de  $f$ , puis de  $u$ , dans le tube  $\Gamma_c^\theta$ .

Le théorème de Fatou ponctuel (théorème 1.2.5) s'en déduit aisément : pour montrer la seule implication non triviale ((iii) $\Rightarrow$ (i)), on fixe  $c > 0$  et, pour  $N \in \mathbf{N}$ , on pose

$$A_N = \{\theta \in \partial M \mid \forall x \in \Gamma_c^\theta, u(x) \geq -N\}.$$

Par dénombrabilité, il suffit de la convergence non-tangentielle en  $\mu$ -presque tout point des  $A_N$ . Soit

$$U = \bigcup_{\theta \in A_N} \Gamma_c^\theta.$$

Par le théorème de Fatou local appliqué à la fonction  $u + N$  sur  $U$ , on a convergence non-tangentielle en  $\mu$ -presque tout point tangentiel pour  $U$ . Or presque tous les points de  $A_N$  sont tangentiels pour  $U$  d'après le corollaire 1.2.16, ce qui conclut.

Donnons enfin les grandes lignes de la preuve du critère de la densité de l'énergie (théorème 1.2.6). Comme au-dessus, il suffit de prouver, pour  $N \in \mathbf{N}$ , la convergence non-tangentielle aux points de

$$B_N = \{\theta \in \partial M \mid D_c^0(\theta) \leq N\}.$$

Par intégration,

$$N \geq \int_{B_N} D_c^0(\theta) \mu_o(d\theta) = -\frac{1}{2} \int_{B_N} \left( \int_{\Gamma_c^\theta} \Delta |u|(dx) \right) \mu_o(d\theta).$$

Avec les notations  $\Gamma = \bigcup_{\theta \in B_N} \Gamma_c^\theta$  et  $H_c(x) = \{\theta \in \partial M \mid x \in \Gamma_c^\theta\}$ , ce dernier terme est égal à

$$-\frac{1}{2} \int_{\Gamma} \mu_o(H_c(x) \cap B_N) \Delta |u|(dx).$$

Cette intégrale est donc finie et l'idée est de minorer le terme  $\mu_o(H_c(x) \cap B_N)$  par un noyau de Green, ce qui permettra une interprétation brownienne. Cela se fait par le principe de Harnack à l'infini : si  $u_{B_N} = P_x[X_\infty \in A_N]$ , c'est une fonction harmonique positive et il existe  $\alpha \in ]0, 1[$  et  $C, c' > 0$  tels que  $\{u_{B_N} > \alpha\} \subset \Gamma$  et

$$\forall x \in \{u_{B_N} > \alpha\} \setminus B(o, c'), \quad G(o, x) \leq C \cdot \mu_o(H_c(x) \cap B_N).$$

En notant  $V = \{u_{B_N} > \alpha\}$ , on a donc

$$- \int_{V \setminus B(o, c')} G(o, x) \Delta |u|(dx) < +\infty.$$

On montre alors en appliquant deux fois la formule de Green le

**Lemme 1.2.21** *Soit  $U$  un domaine régulier borné contenant  $o$ , dont la fonction de Green est notée  $G_U$  et le temps de sortie  $\tau$ . Pour  $u$  harmonique sur  $M$ , on a*

$$E_o[|u(X_\tau)|] = |u(o)| - \int_U G_U(o, x) \Delta |u|(dx).$$

Ce lemme permet dans un premier temps de contrôler ce qui se passe sur  $B(o, c')$  et d'obtenir [2]

$$- \int_V G(o, x) \Delta |u|(dx) < +\infty.$$

On approche ensuite  $V$  par des domaines bornés réguliers  $V_n$  auxquels on applique le lemme, et comme  $G_{V_n} \leq G$ , on obtient  $\sup_n E_o[|u(X_{\tau_n})|] < +\infty$ . Un résultat bien connu de théorie du potentiel donne alors une décomposition de  $u$  en différence de deux fonctions harmoniques positives sur  $V$  auxquelles on peut appliquer le théorème de Fatou local. Toutes deux, et donc aussi  $u$ , convergent donc non-tangentiellement en presque tout  $\theta$  tangentiel pour  $V$ . Comme  $u_{B_N}$  est harmonique bornée et en utilisant sa définition, les résultats classiques sur les fonctions harmoniques bornées (voir [19]) assurent qu'elle converge non-tangentiellement vers 1 en presque tout point de  $B_N$ . De tels points sont tangentiels pour  $B_N$  ce qui conclut.

### 1.3 Le cas des arbres

La méthode probabiliste ayant fait ses preuves dans les variétés de courbure négative, il était tentant de voir ce qu'on pouvait dire dans le cas discret, c'est-à-dire lorsqu'on regarde les fonctions harmoniques sur un graphe. Le cas le plus simple est celui des arbres, qui sont de bons analogues discrets des variétés de courbure négative. Nous pensons *a priori* que les arguments du cas continu s'adapteraient sans problème. Cela a été le cas pour les arguments géométriques, qui sont même considérablement simplifiés par la

structure d'arbre. Il n'en a pas été de même pour les arguments probabilistes car les martingales discrètes sont d'un maniement plus délicat que les martingales continues. En ce qui concerne la théorie du potentiel, les démonstrations dans le cas des variétés utilisaient la connaissance du bord de Martin et des inégalités de Harnack à l'infini [24, 20]. Dans le cas présent, bien qu'on ait à notre disposition les résultats théoriques d'A. Ancona [21, 22], il semble plus naturel d'utiliser les résultats antérieurs de P. Cartier sur le bord de Martin des arbres [35]. Le principe de Harnack à l'infini est alors remplacé par des estimations reposant sur la structure d'arbre et la propriété forte de Markov, ce qui permet d'avoir des démonstrations assez dépouillées et des majorations effectives.

La première étape [1] a été de s'intéresser à la convergence radiale, pour deux raisons. La première était la simplicité, car ce travail avait comme but initial de faire connaître ces méthodes géométriques à un public probabiliste n'ayant pas à sa disposition les notions de géométrie différentielle et il importait de ne pas brouiller le message par une technique superflue. La deuxième était l'intime conviction que dans le cas discret, la convergence radiale et la convergence non-tangentielle étaient des notions presque identiques. Récemment, L. Atanasi et M. Picardello ont prouvé [27], dans le cas particulier des arbres réguliers, la p.p. équivalence entre convergence, bornitude et finitude de l'énergie non-tangentielle, par des méthodes combinatoires assez différentes des nôtres. Il nous a alors semblé opportun de montrer que nos méthodes s'étendent bien au cas non-tangentielle [3].

### 1.3.1 Cadre discret

L'espace que nous considérons ici est un *arbre*, c'est-à-dire un graphe non orienté  $(S, A)$  (une arête étant une partie à deux éléments de  $S$ ) localement fini, connexe et simplement connexe. On utilisera les notions usuelles de *chemin*, *distance*, *géodésique*.

On munit cet arbre d'une *marche aléatoire*  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  aux plus proches voisins, supposée *transiente* (conséquence de l'hypothèse d'uniformité faite plus loin). Sa loi est la donnée d'une famille  $(P_x)_{x \in S}$  où  $P_x$  est la probabilité obtenue lorsque le point de départ de la marche est  $x$ . Cette marche définit un *laplacien* : pour une fonction  $u \in S^{\mathbb{R}}$ ,

$$\forall x, \Delta u(x) = E_x[u(X_1)].$$

Une fonction est dite *harmonique* si son laplacien est nul.

D'après P. Cartier [35], la compactification géométrique et celle de Martin coïncident. La marche aléatoire converge p.s. vers un point du bord  $\partial S$  et, si on note  $\mu_x$  la loi de sortie de la marche partant de  $x$ , appelée aussi *mesure harmonique*, on obtient une famille  $\mu = (\mu_x)_{x \in S}$  de mesures équivalentes sur  $\partial S$ .

### 1.3.2 Notions radiales et non-tangentielles

On se fixe un point base  $o$ . Comme dans le cas des variétés à courbure négative, les analogues des cônes non-tangentiels euclidiens sont les voisinages tubulaires de rayons

géodésiques : si  $\theta \in \partial S$ , on note  $\gamma_\theta$  le rayon géodésique joignant  $o$  à  $\theta$  et, pour  $c \in \mathbf{N}$ , on note  $\Gamma_c^\theta = \{y \in S \mid d(y, \gamma_\theta) \leq c\}$ . Soit  $u$  une fonction harmonique. Pour  $c \in \mathbf{N}$ , son *énergie  $c$ -non-tangentielle* en  $\theta$  est  $J_c^\theta(u) = \sum_{y \in \Gamma_c^\theta} \Delta u^2(y)$  et son *énergie radiale* en  $\theta$  est  $J^\theta(u) = J_0^\theta(u) = \sum_{k=0}^\infty \Delta u^2(\gamma_\theta(k))$ . Il y a convergence, bornitude ou finitude de l'énergie radiale de  $u$  en  $\theta$  selon que  $(u(\gamma_\theta(n)))_n$  converge, qu'elle est bornée ou que  $J^\theta(u) < +\infty$ . Il y a convergence *non-tangentielle* de  $u$  en  $\theta$  si, pour tout  $c \in \mathbf{N}$ ,  $u(y)$  admet une limite lorsque  $y$  tend vers  $\theta$  en restant dans  $\Gamma_c^\theta$ . Il y a bornitude *non-tangentielle* (resp. finitude de l'énergie *non-tangentielle*) de  $u$  en  $\theta$  si, pour tout  $c \in \mathbf{N}$ ,  $u$  est bornée sur  $\Gamma_c^\theta$  (resp.  $J_c^\theta(u) < +\infty$ ).

### 1.3.3 Un premier résultat stochastique

Pour une fonction  $u$  harmonique, l'énergie stochastique est la v.a.

$$J^*(u) = \sum_{k=0}^\infty (\Delta u^2)(X_k)$$

(termes positifs par harmonicité).

On définit alors les trois événements  $\mathcal{L}^{**}$ ,  $\mathcal{N}^{**}$  et  $\mathcal{J}^{**}$  par, respectivement, la convergence de  $u(X_n)$  lorsque  $n$  tend vers  $\infty$ , sa bornitude et la finitude de l'énergie stochastique. Contrairement au cas des variétés, on n'obtient pas directement l'égalité presque partout entre ces trois ensembles. Les théorèmes de martingales sont plus faibles dans le cas discret et ne permettent d'avoir qu'une inclusion, et elle est moins facile à démontrer. L'égalité viendra plus tard, comme une conséquence de la démonstration des résultats non-tangentiels.

**Lemme 1.3.1** *Pour toute fonction harmonique  $u$  (et tout point  $x$ ), on a*

$$\mathcal{J}^{**} \stackrel{\sim}{\subset} \mathcal{L}^{**} \subset \mathcal{N}^{**}$$

la première inclusion étant  $P_x$ -presque sûre.

La deuxième inclusion est triviale car toute suite convergente est bornée. Montrons la première : pour cela, il suffit de montrer que, pour tout  $N \in \mathbf{N}$ , l'ensemble  $\mathcal{J}_N^{**} = \{\omega \in \Omega \mid J^*(u)(\omega) \leq N\}$  est presque inclus dans  $\mathcal{L}^{**}$ , le résultat cherché en découlant par réunion dénombrable. Fixons alors  $N \in \mathbf{N}$  et notons  $\tau_N$  le premier temps  $n$  pour lequel  $\sum_{k=0}^{n-1} (\Delta u^2)(X_k) > N$  en convenant que  $\tau_N = \infty$  lorsque cela n'arrive pas. Pour  $n \in \mathbf{N}$ , l'évènement  $\{\tau_N > n + 1\}$  étant égal à  $\{\sum_{k=0}^n (\Delta u^2)(X_k) \leq N\}$  (la somme étant à termes positifs), il est  $\mathcal{F}_n$ -mesurable. L'évènement complémentaire  $\{\tau_N - 1 \leq n\}$  est donc  $\mathcal{F}_n$ -mesurable et  $\tau'_N = \tau_N - 1$  est un temps d'arrêt. Remarquons que

$$\sum_{k=0}^{\tau'_N - 1} (\Delta u^2)(X_k) \leq N$$

et que  $\tau'_N = \infty$  si et seulement si  $J^*(u) \leq N$ . Stoppons alors la martingale  $M_n = u^2(X_n) - \sum_{k=0}^{n-1} \Delta u^2(X_k)$  au temps d'arrêt  $\tau'_N$  :

$$M_{n \wedge \tau'_N} \geq - \sum_{k=0}^{(n \wedge \tau'_N) - 1} \Delta u^2(X_k) \geq -N.$$

Cette martingale étant minorée par une constante, elle est presque sûrement convergente. Sur l'événement  $\mathcal{J}_N^{**}$ , d'une part  $\tau'_N = \infty$ , donc  $M_n = M_{n \wedge \tau'_N}$  est presque sûrement convergente, et d'autre part  $\sum_{k=0}^{\infty} \Delta u^2(X_k)$  converge, donc  $u^2(X_n)$  a presque sûrement une limite finie. Pour se ramener à la fonction  $u$ , on utilise une astuce classique : la fonction  $v = u + 1$  est aussi une fonction harmonique et  $\Delta v^2 = \Delta(u^2 + 2u + 1) = \Delta u^2$  car  $2u + 1$  est harmonique. Ainsi on peut appliquer à  $v$  ce qui précède et, sur l'événement  $\mathcal{J}_N^{**}$  (qui est le même pour  $u$  et  $v$ ),  $v^2(X_n)$  a presque sûrement une limite finie. Comme  $v^2 = u^2 + 2u + 1$ , si  $v^2$  et  $u^2$  ont une limite finie, alors  $u$  en a une. Ainsi  $\mathcal{J}_N^{**} \stackrel{\sim}{\subset} \mathcal{L}^{**}$ , ce qui achève la preuve du lemme.

La méthode des  $h$ -processus de Doob permet là aussi de conditionner la marche à sortir en un point  $\theta$  donné du bord et on note  $P_x^\theta$  les probabilités conditionnées. Les événements asymptotiques vérifient une loi 0–1 et on définit les notions *stochastiques* de convergence, bornitude et finitude de l'énergie en un point  $\theta \in \partial S$  par les ensembles

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^* &= \left\{ \theta \in \partial S \mid P_x^\theta(\mathcal{L}^{**}) = 1 \right\}, \\ \mathcal{N}^* &= \left\{ \theta \in \partial S \mid P_x^\theta(\mathcal{N}^{**}) = 1 \right\}, \\ \mathcal{J}^* &= \left\{ \theta \in \partial S \mid P_x^\theta(\mathcal{J}^{**}) = 1 \right\}. \end{aligned}$$

De plus, pour  $\theta \in \mathcal{L}^*$ , la variable aléatoire  $\lim u(X_n)$  est  $P_x^\theta$ -p.s. constante (indépendante de  $x$ ) et cette valeur est appelée la *limite stochastique* de  $u$  en  $\theta$ . En appliquant une formule de “désintégration” au lemme 1.3.1, on obtient le résultat suivant :

**Lemme 1.3.2** *Pour toute fonction harmonique  $u$ , on a*

$$\mathcal{J}^* \stackrel{\sim}{\subset} \mathcal{L}^* \subset \mathcal{N}^*$$

*la première inclusion étant  $\mu$ -presque sûre ( $\mu$  étant la mesure harmonique).*

### 1.3.4 Résultats

Les arbres sont de parfaits analogues des variétés de courbure négative. Cela permet, entre autres, d'avoir un comportement similaire des géodésiques : écartement de deux géodésiques, unicité du segment géodésique entre deux points, bord à l'infini.

Nous avons cependant une hypothèse plus forte dans le cas des variétés, à savoir un pincement de la courbure. Pour traduire cela, on regarde le nombre d'arêtes partant de chaque point ainsi que leurs poids respectifs : beaucoup d'arêtes avec des poids faibles signifient que la courbure est très négative. On se convainc alors qu'une bonne hypothèse, d'ailleurs déjà utilisée dans les travaux de A. Korányi, M.A. Picardello et M.H. Taibleson [52] et M.A. Picardello et W. Woess [60], est la suivante :

$$(\mathcal{H}) \quad \exists \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \sim y, \quad \varepsilon \leq p(x, y) \leq \frac{1}{2} - \eta.$$

Cette hypothèse assure en particulier que le nombre de voisins d'un sommet est minoré par trois et majoré uniformément sur  $S$ . De plus, elle entraîne que l'arbre est transient, comme conséquence immédiate du lemme 1.3.4 qu'on verra plus loin. On a alors le

**Théorème 1.3.3** *Soient  $G = (S, A)$  un arbre muni d'une marche aléatoire vérifiant l'hypothèse d'uniformité  $(\mathcal{H})$  et  $u$  une fonction harmonique.*

*Alors les convergences non-tangentielle, radiale et stochastique, les bornitudes non-tangentielle, radiale et stochastique, et les finitudes de l'énergie non-tangentielle, radiale et stochastique coïncident pour  $\mu$ -presque tout point du bord.*

Remarquons que ces presque partout équivalences ne sont pas des équivalences, mais qu'il y a parfois de vraies implications, comme le fait que la convergence entraîne *toujours* la bornitude. Un travail de construction de contre-exemples est en cours pour montrer que seules les implications triviales sont "vraies".

### 1.3.5 Simple connexité et uniformité

On note  $H(x, y)$  la probabilité, partant de  $x$ , d'atteindre  $y$ . En notant  $p_n(x, y) = P_x[X_n = y]$ , on définit la *fonction de Green*  $G(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x, y)$  qui est finie par transience. La **simple connexité** entraîne directement les deux égalités suivantes pour un point  $z$  sur le segment géodésique  $[x, y]$  :

$$H(x, y) = H(x, z)H(z, y) \quad \text{et} \quad G(x, y) = H(x, z)G(z, y) \quad (1)$$

Par ailleurs l'**hypothèse d'uniformité**  $(\mathcal{H})$  permet de majorer uniformément  $H$  et  $G$  :

**Lemme 1.3.4**

$$\begin{aligned} \exists C_H \left( = \frac{\frac{1}{2} - \eta}{\frac{1}{2} + \eta} \right) < 1, \forall x \neq y, H(x, y) \leq C_H. \\ \exists C_G \left( = \frac{1}{1 - C_H} \right), \forall x, y, G(x, y) \leq C_G. \end{aligned}$$

On peut en voir une démonstration dans l'article de M.A. Picardello et W. Woess déjà cité [60]. Elle consiste à comparer la situation à celle d'une chaîne de Markov unidimensionnelle sur  $\mathbf{N}$  telle qu'en un point différent de 0, la probabilité d'augmenter de 1 vaille  $\frac{1}{2} + \eta$  et celle de décroître de 1 vaille  $\frac{1}{2} - \eta$ . Dans ce cas particulier, il est possible de calculer explicitement la probabilité d'atteindre 0 en partant de 1. La comparaison repose alors sur une récurrence. On trouve dans [1] une preuve à base de martingales due à C. Leuridan.

Les formules 1 et le lemme 1.3.4 permettent de démontrer trois résultats dont certains ont un air de "déjà vu" :

**Corollaire 1.3.5** ("Lemme d'évitement")

*Soit  $U$  une partie connexe de  $S$  (au sens de l'introduction). Alors*

$$P_x[\text{la marche rencontre } U] \leq (C_H)^{d(x,U)}.$$

Pour énoncer les deux résultats suivants, introduisons une notation : si  $E$  est une partie du bord, on notera

$$\Gamma(E) = \bigcup_{\theta \in E} \gamma_\theta$$

la réunion des rayons géodésiques pointant vers  $E$ . On a alors les résultats :

**Corollaire 1.3.6** ("Lemme de la fin")

*Soit  $E$  un borélien du bord. Alors, pour  $\mu$ -presque tout  $\theta \in E$ , la marche aléatoire finit  $P_o^\theta$ -presque sûrement sa vie dans  $\Gamma(E)$ .*

**Corollaire 1.3.7** ("Lemme des pointes")

*Soit  $E$  un borélien du bord. Alors, pour  $\mu$ -presque tout  $\theta \in E$ ,  $\Gamma(E)$  contient une "pointe" de  $\tilde{\gamma}_\theta$ , c'est-à-dire contient  $\tilde{\gamma}_\theta$  sauf un ensemble fini.*

### 1.3.6 Éléments de preuve

Pour plus de commodité, nous noterons  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{J}$ , les ensembles de points  $\theta$  du bord pour lesquels il y a respectivement convergence non-tangentielle, bornitude non-tangentielle ou finitude de l'énergie non-tangentielle de  $u$  en  $\theta$ . Les ensembles correspondant aux propriétés radiales seront eux notés  $\mathcal{L}^r$ ,  $\mathcal{N}^r$  et  $\mathcal{J}^r$ . On rappelle que ceux correspondant aux propriétés stochastiques sont  $\mathcal{J}^*$ ,  $\mathcal{L}^*$  et  $\mathcal{N}^*$ . Il nous faut montrer que tous ces ensembles sont  $\mu$ -presque partout égaux. D'après le lemme 1.3.2, on sait déjà que  $\mathcal{J}^* \tilde{\subset} \mathcal{L}^* \subset \mathcal{N}^*$  et il est clair que  $\mathcal{L} \subset \mathcal{N}$  et  $\mathcal{L}^r \subset \mathcal{N}^r$ , puisqu'une suite convergente est bornée. De plus, il est clair que chaque propriété non-tangentielle implique la propriété radiale correspondante :  $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}^r$ ,  $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}^r$  et  $\mathcal{J} \subset \mathcal{J}^r$ .

Par ailleurs, puisqu'on est sur un arbre, un chemin partant de  $o$  et qui tend vers un point  $\theta$  du bord passe forcément par tous les points du segment géodésique  $\gamma_\theta$ . Ainsi, si

$X_0 = o$  et  $X_\infty = \theta$ , alors la suite  $(\gamma_\theta(n))$  est une suite extraite de la suite  $(X_n)$  et on a les inclusions  $\mathcal{L}^* \subset \mathcal{L}^r$ ,  $\mathcal{N}^* \subset \mathcal{N}^r$ , et  $\mathcal{J}^* \subset \mathcal{J}^r$ . Cela entraîne aussi qu'en cas de convergences stochastique et radiale, les limites sont les mêmes.

En résumé, on a donc les inclusions suivantes :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{J}^* & \widetilde{\subset} & \mathcal{L}^* & \subset & \mathcal{N}^* \\ \cap & & \cap & & \cap \\ \mathcal{J}^r & & \mathcal{L}^r & \subset & \mathcal{N}^r \\ \cup & & \cup & & \cup \\ \mathcal{J} & & \mathcal{L} & \subset & \mathcal{N} \end{array}$$

Il est montré dans [1] que  $\mathcal{N}^r \widetilde{\subset} \mathcal{J}^r$  et  $\mathcal{J}^r \widetilde{\subset} \mathcal{J}^*$ , ce qui prouve l'équivalence des notions radiales et stochastiques. Il est montré dans [3] que  $\mathcal{L}^* \subset \mathcal{L}$  et  $\mathcal{N} \subset \mathcal{J}$ , ce qui achève la preuve du théorème.

La preuve de l'inclusion  $\mathcal{J}^r \widetilde{\subset} \mathcal{J}^*$ , partant de la même idée que celle de la courbure négative ne pose pas de problème particulier en utilisant les outils démontrés plus haut et nous ne la détaillerons pas.

Les démonstrations de  $\mathcal{N}^r \widetilde{\subset} \mathcal{J}^r$  et  $\mathcal{N} \subset \mathcal{J}$  sont largement inspirées des démonstrations de la courbure négative, mais le cas radial est beaucoup plus simple. Pour le cas non-tangentiel, on démontre deux lemmes similaires à ceux de la courbure négative, mais par des méthodes très différentes qui reposent sur des majorations explicites obtenues à l'aide du lemme 1. Il nous paraît donc intéressant de détailler ici les preuves de ces lemmes. En revanche, nous ne donnerons pas plus de détail sur les démonstrations de ces inclusions. Rappelons que le noyau de Martin est défini par

$$K_\theta(x) = \lim_{y \rightarrow \theta} \frac{G(x, y)}{G(o, y)}.$$

**Lemme 1.3.8**  $\forall c \in \mathbf{N}, \exists \alpha > 0, \forall \theta \in \partial S, \forall y \in \Gamma_c^\theta, G(o, y)K_\theta(y) \geq \alpha$ .

Si  $U$  est une partie de  $S$ , on définit aussi sur  $U \times U$  la fonction de Green  $G_U(x, y)$  de  $U$  comme l'espérance, partant de  $x$ , du temps de séjour en  $y$  avant de sortir de  $U$ .

**Lemme 1.3.9** Pour  $U \subset S$  contenant  $\Gamma_c^\theta$  et  $\tau$  le temps de sortie de  $U$ ,

$$\lim_{y \in \Gamma_c^\theta, y \rightarrow \theta} \frac{G_U(o, y)}{G(o, y)} = P_o^\theta[\tau = +\infty].$$

Montrons alors le lemme 1.3.8. Notons  $\pi(y)$  la projection de  $y$  sur  $\gamma_\theta$  (voir [1]) et remarquons que, pour  $z \in (\pi(y), \theta)$ ,

$$G(o, z) = H(o, \pi(y))G(\pi(y), z) \text{ et } G(y, z) = H(y, \pi(y))G(\pi(y), z)$$

d'après la formule 1. Ainsi

$$\frac{G(y,z)}{G(o,z)} = \frac{H(y,\pi(y))}{H(o,\pi(y))}$$

ne dépend plus de  $z$  et sa limite quand  $z$  tend vers  $\theta$  est donc

$$K_\theta(y) = \frac{H(y,\pi(y))}{H(o,\pi(y))}.$$

Puis

$$G(o,y)K_\theta(y) = H(y,\pi(y))\frac{G(o,y)}{H(o,\pi(y))} = H(y,\pi(y))H(\pi(y),y)G(y,y)$$

par la formule 1. Or

$$G(y,y) \geq p_2(y,y) \geq 3\varepsilon^2$$

et

$$H(y,p(y))H(p(y),y) \geq \varepsilon^{2c}$$

par ( $\mathcal{H}$ ) et le fait que  $d(y,\pi(y)) \leq c$ , ce qui achève la preuve du lemme 1.3.8.

Prouvons alors le lemme 1.3.9 :

$$G_U(o,y) = G(o,y) - E_o[G(X_\tau,y)\mathbf{1}_{(\tau < +\infty)}] = G(o,y) \left( 1 - E_o \left[ \frac{G(X_\tau,y)}{G(o,y)} \mathbf{1}_{(\tau < +\infty)} \right] \right)$$

et par définition du noyau de Martin, quitte à intervertir la limite et l'espérance,

$$\lim_{y \in \Gamma_c^\theta, y \rightarrow \theta} \frac{G_U(o,y)}{G(o,y)} = 1 - E_o[K_\theta(X_\tau)\mathbf{1}_{(\tau < +\infty)}] = P_o^\theta[\tau = +\infty].$$

La dernière égalité est juste une formule de conditionnement [1] que nous avons décidé de passer sous silence dans cet ouvrage. On justifie cette interversion par le théorème de convergence dominée. L'idée est de majorer, lorsque  $\tau$  est fini,  $\frac{G(X_\tau,y)}{G(o,y)}$  par un multiple de  $K_\theta(X_\tau)$ . Pour cela on compare  $G(X_\tau,y)$  et  $K_\theta(X_\tau)$ . On note toujours  $\pi$  la fonction de projection sur  $\gamma_\theta$ . On distingue deux cas.

Si  $\pi(X_\tau) \in [o, \pi(y)]$ ,

$$\frac{G(X_\tau,y)}{K_\theta(X_\tau)} = \frac{G(\pi(X_\tau),y)}{K_\theta(\pi(X_\tau))} = \frac{G(o,y)}{K_\theta(o)} = G(o,y),$$

d'après la formule 1, en remarquant que cette formule entraîne aussi par définition de  $K_\theta$  et passage à la limite que

$$K_\theta(X_\tau) = H(X_\tau,\pi(X_\tau))K_\theta(\pi(X_\tau)) \text{ et } K_\theta(o) = H(o,\pi(X_\tau))K_\theta(\pi(X_\tau)).$$

Si  $\pi(X_\tau) \notin [o, \pi(y)]$ , on a encore

$$\frac{G(X_\tau,y)}{K_\theta(X_\tau)} = \frac{G(\pi(X_\tau),y)}{K_\theta(\pi(X_\tau))}.$$

Par ailleurs, par sa définition et la formule 1,  $K_\theta(\pi(X_\tau)) = (H(o, \pi(X_\tau)))^{-1}$  donc le rapport ci-dessus est égal à

$$H(o, \pi(X_\tau))G(\pi(X_\tau), y) = H(o, \pi(y))H(\pi(y), \pi(X_\tau))G(\pi(X_\tau), y).$$

On sait que  $G$  est bornée (voir [60, 1]) et  $H$  est une probabilité, donc il ne reste plus qu'à comparer  $H(o, \pi(y))$  à  $G(o, y)$ . Or

$$\frac{H(o, \pi(y))}{G(o, y)} = (G(\pi(y), y))^{-1}$$

et  $\frac{1}{G}$  est majorée par  $\frac{1}{3\varepsilon^2}$ .

En réunifiant les deux cas, il existe une constante  $\beta$  telle que

$$\frac{G(X_\tau, y)}{K_\theta(X_\tau)} \leq \beta \cdot G(o, y)$$

ce qui fournit la majoration voulue et achève la preuve du lemme 1.3.9.

La démonstration de  $\mathcal{L}^* \subset \mathcal{L}$  utilise un résultat d'A. Ancona [22] similaire au résultat concernant les suites de boules non-tangentielles sur les variétés, qu'on prouve ici facilement grâce à la simple connexité :

**Lemme 1.3.10** *Si  $(x_n)_n$  est une suite de points de  $S$  convergeant non-tangentiellement vers un point  $\theta \in \partial S$ , alors la marche conditionnée à sortir en  $\theta$  passe presque sûrement par une infinité des  $x_n$ .*

Voyons tout d'abord comment ce lemme permet de démontrer le résultat annoncé. Par l'absurde, supposons que la fonction harmonique  $u$  admette une limite stochastique  $l \in \mathbf{R}$  en  $\theta$  mais ne converge pas non-tangentiellement vers  $l$  en  $\theta$ . Il existe alors un  $\delta > 0$  et une suite  $(x_n)_n$  convergeant non-tangentiellement vers  $\theta$  tels que, pour tout  $n$ ,  $|u(x_n) - l| \geq \delta$ . Alors la marche  $(X_k)_k$  rencontre  $P_o^\theta$ -p.s. une infinité de  $x_n$  par le lemme, ce qui nous permet d'extraire une suite  $(X_{k_j})_j$  telle que, pour tout  $j$ ,  $|u(X_{k_j}) - l| \geq \delta$ . Ainsi,  $P_o^\theta$ -presque sûrement, la fonction  $u$  ne converge pas vers  $l$  le long de  $(X_k)_k$ , ce qui fournit la contradiction cherchée.

Démontrons enfin le lemme 1.3.10. Rappelons que la méthode des  $h$ -processus de Doob consiste à considérer une nouvelle chaîne de Markov définie par

$$p^\theta(x, y) = \frac{K_\theta(y)}{K_\theta(x)} p(x, y)$$

où le noyau de Martin est défini par

$$K_\theta(x) = \lim_{y \rightarrow \theta} \frac{G(x, y)}{G(o, y)}$$

(voir par exemple [43]). Cette formule entraîne directement des formules analogues pour les  $p_n^\theta$  et les fonctions  $H^\theta$  et  $G^\theta$  associées. Considérons alors, pour un  $n$  donné, la projection  $y_n$  de  $x_n$  sur le rayon géodésique  $\gamma_\theta$  (voir [1]). Comme la marche partant de  $o$  et conditionnée à sortir en  $\theta$  passe p.s. par  $y_n$  d'après la structure arborescente, la propriété forte de Markov donne

$$H^\theta(o, x_n) = H^\theta(y_n, x_n) = \frac{K_\theta(x_n)}{K_\theta(y_n)} H(y_n, x_n).$$

Par définition des noyaux de Martin,

$$\frac{K_\theta(x_n)}{K_\theta(y_n)} = \lim_{y \rightarrow \theta} \frac{G(x_n, y)}{G(y_n, y)}$$

et  $G(x_n, y) = H(x_n, y_n)G(y_n, y)$  dès que  $y_n \in [x_n, y]$ , donc

$$H^\theta(o, x_n) = H(x_n, y_n)H(y_n, x_n).$$

La distance de  $x_n$  à  $y_n$  étant majorée puisque  $(x_n)_n$  converge non-tangentielllement vers  $\theta$ , cette dernière quantité est minorée par une constante  $C > 0$  par  $(\mathcal{H})$ . Par le lemme de Fatou, la probabilité sachant qu'on sort en  $\theta$  de rencontrer une infinité de  $x_n$  est donc supérieure ou égale à  $C$ , et la loi 0–1 asymptotique assure qu'elle vaut donc 1, ce qui achève la preuve du lemme.

## 1.4 Le cas des groupes hyperboliques (C. Petit)

La suite logique du cas des arbres était de considérer des graphes hyperboliques vérifiant les hypothèses des travaux d'A. Ancona [21, 22], pour avoir l'identification des bords nécessaire à notre stratégie. Nous avons cependant utilisé, aussi bien dans le cas des variétés que dans celui des arbres, des hypothèses d'uniformité qui ne sont pas impliquées par l'hyperbolicité. Un cas où cette uniformité est automatique est celui des groupes hyperboliques.

Il était donc logique de s'attaquer aux groupes hyperboliques avec la même stratégie globale. On pouvait s'attendre à quelques difficultés au niveau des martingales discrètes, comme on l'a vu pour les arbres. Par ailleurs, le côté géométrique, traité à coup de théorèmes de comparaison à la courbure constante (du genre théorème de Rauch) dans le cas des variétés et traité à l'aide de la simple connexité dans le cas des arbres, était à réinventer.

C'est ce qu'à fait Camille Petit, thésard que je co-encadre depuis septembre 2008. Il a d'abord introduit la notion de “tube” non-tangentiel et démontré le critère de la bornitude :

**Setting :** *We fix now a non-elementary hyperbolic group  $S$ , a finite symmetric generating system  $Z$  and a finitely supported probability measure  $\nu$  on  $S$  such that  $\text{supp}(\nu)$  generates  $S$  as a semi-group.*

We will note  $d$  the distance arising from  $Z$ ,  $\delta$  the hyperbolicity constant,  $c_0$  and  $m_1$  the admissibility constants and  $o \in S$  a base point.

Let us now define the non-tangential notions. If  $c > 0$  and  $\theta \in \partial S$ , denote by

$$\Gamma_c^\theta := \{x \in S \mid \exists \gamma \text{ geodesic ray from } o \text{ to } \theta \text{ such that } d(x, \gamma) < c\}$$

the non-tangential tube of radius  $c$  and vertex  $\theta$ . A function  $u$  converges non-tangentially at  $\theta$  if, for all  $c > 0$ ,  $u(x)$  has a limit as  $x$  goes to  $\theta$  in  $\Gamma_c^\theta$ . In the same way, the function is non-tangentially bounded at  $\theta$  if, for all  $c > 0$ ,  $u$  is bounded on  $\Gamma_c^\theta$ .

Remark that these non-tangential notions do not depend on  $o$ , due to the alternative definition of  $\partial S$  by geodesic rays ([48]).

**Theorem 1.4.1** (*Petit*)

*In the setting above, for a harmonic function  $u$ , both following properties are equivalent for  $\mu$ -almost all  $\theta \in \partial S$  :*

1. *the function  $u$  converges non-tangentially at  $\theta$*
2. *the function  $u$  is non-tangentially bounded at  $\theta$*

Ce résultat, disponible sur ArXive, est actuellement soumis. Il a ensuite démontré le critère de l'énergie et affiné celui de la bornitude :

For a harmonic function  $u$  relative to a random walk with finite support on a non-elementary hyperbolic group, following properties are equivalent for almost all point  $\theta$  of the boundary :

1. the function  $u$  converges non-tangentially at  $\theta$
2. the function  $u$  is non-tangentially bounded at  $\theta$
3. the function  $u$  has a finite non-tangential energy at  $\theta$
4. the function  $u$  is non-tangentially bounded from below (or above) at  $\theta$

Ce résultat est écrit et en phase de relecture.



## Chapitre 2

# Analyse spatiale et statistique des données environnementales : une approche globale des catastrophes naturelles

Les travaux décrits ici concernent l'analyse spatiale et statistique de données environnementales et sociales en lien avec les catastrophes naturelles. Ils sont menés à l'échelle mondiale : c'est l'approche *globale*, particulièrement développée par les membres du GRID/Europe, (organisme relevant du Programme des Nations Unies pour l'Environnement (UNEP)), qui est décrite dans une première section.

Dans une seconde section, nous détaillerons notre contribution à l'élaboration d'un indice de vulnérabilité des populations aux catastrophes naturelles, le *Disaster Risk Index*, analogue pour les catastrophes naturelles du célèbre *Human Development Index*, permettant à l'ONU de cibler au mieux ses aides et susceptible d'être utilisé dans les travaux ultérieurs sur le sujet. Cette étude était commanditée par le Programme des Nations Unies pour le Développement (UNDP).

En dehors de la construction de l'indice lui-même, nous avons aussi participé au traitement d'un type de catastrophe spécifique : les cyclones. Cela sera décrit dans une troisième section.

Dans la dernière section, nous présenterons l'élaboration d'une carte mondiale d'aléas d'inondations, partie d'un travail plus vaste, le *Global Assessment Report*, qui fait naturellement suite à l'étude précédente.

## 2.1 Analyse globale des données environnementales

Depuis une vingtaine d'années, les progrès technologiques, notamment au niveau de l'imagerie satellite et des capacités de traitement et de stockage des données, ont permis le développement dans de nombreux domaines de bases de données *globales*, c'est-à-dire recensant les items au niveau mondial.

### 2.1.1 Le GRID/Europe

Le GRID, *Global Resource Information Database*, est un organisme dépendant du Programme des Nations Unies pour l'Environnement (UNEP) chargé de la collecte et de la diffusion de telles données globales. Une fois les données collectées et traitées, de nombreux produits cartographiques, mais aussi des analyses, sont diffusés gratuitement par l'intermédiaire de sites internet et de rapports publics.

Son bureau de Genève, le GRID/Europe, a un statut tripartite spécial, car y participent aussi l'OFEN (Office Fédéral de l'Environnement, équivalent suisse de notre ministère de l'environnement) et l'université de Genève. À ce titre, j'ai été partiellement détaché pendant quatre ans auprès du GRID/Europe lors de mon passage à l'université de Genève. J'ai depuis collaboré régulièrement avec cet organisme. En plus de sa mission initiale de collecte et de diffusion de données, il a certaines spécificités.

Il a développé un département *Early Warning*, dont le but est de repérer très tôt certains désastres grâce à de l'imagerie satellite. Il s'occupe par exemple de repérage et de suivi des feux de forêt.

Il aussi développé de nombreuses analyses, par exemple sur l'impact de l'activité humaine sur la couverture du sol (zones urbaines, forêts, glaciers, lacs, etc.), sur l'impact des tsunamis, etc. Les travaux auxquels j'ai collaboré concernent, eux, l'étude de la vulnérabilité des populations aux catastrophes naturelles. Ces études sont souvent menées en partenariat avec d'autres agences de l'ONU. Par exemple les études développées ici ont été menées sur l'impulsion du Programme des Nations Unies pour le Développement (UNDP), en collaboration avec plusieurs universités et avec l'appui d'autres organismes comme l'Organisation Mondiale de Météorologie (WMO).

### 2.1.2 L'analyse des données géoréférencées

Pour comprendre quelles sont les spécificités de l'approche globale, il peut être utile de décrire d'abord plus généralement les outils d'analyse des données spatiales : celles que nous considérons sont presque toutes *géoréférencées*, c'est à dire que chaque item vient avec des coordonnées géographiques, en plus de ses caractéristiques propres. Il y a deux types de données.

Les données *vectérielles* sont formées d'objets géométriques dont le positionnement spatial est donné par les coordonnées d'un nombre fini de points. Par exemple, une par-

celle cadastrale est un polygone dont sont stockées les coordonnées des sommets. Des stations de mesure météorologiques seront géoréférencées par des points, une route par une ligne brisée, etc. Ce type de donnée est très économique en place mémoire.

Les données *image* ou *raster*, sont elles stockées relativement à un maillage (qu'on peut imaginer rectangulaire, même si ça ne représente évidemment pas la géométrie sphérique de la terre) de l'espace considéré. Ce maillage a un pas (voire deux : le pas horizontal et le pas vertical) qui est aussi appelé *résolution*. On donne alors une valeur par cellule. Par exemple, "Hydrosheds 90m", que nous avons utilisé pour l'étude sur les crues, est un modèle numérique de terrain global avec une résolution de 90 m : il donne, pour chaque cellule de 90 m par 90 m, l'altitude moyenne de celle-ci. On peut représenter, à l'aide d'un code couleur pertinent, les données par une image, d'où le nom de ce format. Ce type de données est très gourmand en place mémoire. Remarquons que les images satellites sont toutes des données raster.

La *géomatique* est définie comme une "approche intégrée de mesure, gestion, stockage, analyse et diffusion de données à référence spatiale". Elle fait appel à des logiciels spécifiques, appelés systèmes d'information géographique (G.I.S. en anglais), qui incluent aussi en général une composante de gestion de bases de données et quelques statistiques, mais cela reste très limité. Même si ces logiciels servent beaucoup à la cartographie, leur véritable intérêt réside dans leurs fonctions d'*analyse spatiale* : chaque donnée géoréférencée constitue une *couche* et le jeu est de superposer (ou "croiser") les couches pour obtenir une information pertinente. Par exemple, dans notre étude sur les cyclones, on a construit des *zones-tampon*, c'est-à-dire des zones autour de la trajectoire d'un cyclone où le vent dépasse une certaine limite. Ces zones-tampon sont des données vectorielles, stockées sous forme de polygones. On croise ensuite cette couche avec une couche raster de population et le logiciel nous fournit le nombre de personnes touchées par le cyclone. Certaines études peuvent être très complexes : un cas d'école est le choix de l'emplacement d'un incinérateur. Il faudra estimer la zone de pollution à l'aide d'un modèle prenant en compte non seulement le type d'incinérateur, la hauteur de la cheminée, mais aussi les conditions météorologiques usuelles, la force du vent, etc. puis considérer le nombre de personnes situées dans cette zone de pollution qu'il faudra déplacer, celui des personnes situées dans une zone plus large de désagrément, les longueurs des trajets des camions poubelles, etc., puis pondérer tous les critères à l'aide de méthodes spécifiques, ce qui permettra *in fine* de comparer les différents sites possibles. Certains de ces logiciels, spécialisés dans le traitement d'images satellites, sont très puissants pour faire du calcul d'images. Par exemple, si l'on veut faire une opération comme un maximum entre deux images, le calcul se fera cellule par cellule et gagnera à être parallélisé.

On a aussi besoin de l'outil statistique (et pour ça de logiciels spécifiques) d'abord pour voir les données sous un maximum d'angles différents ce qui permettra de faire des conjectures, ensuite pour étayer ces conjectures (ce ne sont pas des preuves au sens mathématique du terme...), comme dans le cas de l'étude du lien entre niveau de développement et vulnérabilité des populations aux catastrophes naturelles. L'outil statistique sert aussi

dans la préparation ou la construction de données, comme dans le cas de l'étude sur les crues où il permet par exemple une estimation des débits centenaires à partir d'une série temporelle. Cet outil statistique nous semble aussi particulièrement important dans le cas de données globales, car il permet de "lisser" certains défauts dus à cette globalité.

### 2.1.3 Qualité des données globales

La qualité de ces données est en effet très inégale pour de nombreuses raisons dont nous décrivons les principales.

#### **Couverture**

En ce qui concerne certaines données physiques, comme la température ou les précipitations, liées essentiellement à des stations de mesure, la répartition de ces stations est souvent très inégale : il y en a très peu en mer et la couverture dépend beaucoup de la densité de population, des pays, de leur niveau de développement, etc. Si l'on veut une couverture totale, on a recours à des modèles de reconstruction spatiale très sophistiqués.

Le travail sur les crues décrit plus bas entre en partie dans cette problématique car on n'a pas une station de mesure à chaque exutoire de bassin versant. On a donc recours à une analyse spatiale et statistique pour estimer les débits.

#### **Homogénéité**

Par ailleurs, pour des raisons historiques, les conventions de mesure peuvent varier suivant les endroits. Le travail d'homogénéisation des mesures existantes est souvent énorme.

Dans le cas d'une reconstruction spatiale, la qualité sera souvent inhomogène, évidemment meilleure là où l'on a beaucoup de mesures réelles.

#### **Traitement informatique**

Pour d'autres données, les mesures peuvent être obtenues par satellite. Mais dans ce cas les mesures sont dépendantes des conditions météorologiques, de la position du soleil, etc. Il y a un traitement informatique énorme et la fiabilité peut être médiocre dans certains cas.

#### **Accès aux données**

Par ailleurs, même des données existantes ne sont pas toujours disponibles. Certains réseaux de mesure sont privés, par exemple, certaines stations de mesure de débit des cours d'eau servant à des compagnies d'assurances. Même quand ces réseaux sont publics, ils sont la propriété des États et certains refusent de les diffuser ou les font chèrement payer.

#### **Résolution spatiale**

La résolution spatiale est parfois insuffisante pour les analyses à mener. Ou certaines résolutions assez fines peuvent être obtenues de manière artificielle par des interpolations parfois non pertinentes, dont il convient de se méfier.

Cependant, ce domaine est en évolution permanente, et la qualité augmente sans cesse. Par exemple, au début de l'étude sur les crues, le seul modèle numérique de terrain global,

disponible et conçu pour être hydrologiquement correct (même s'il comporte encore des erreurs comme nous l'avons montré) était "Hydro1K", dont la résolution est de 1 km. À la fin de l'étude, le nouveau modèle "Hydroshed90m" de résolution 90 m était disponible.

#### 2.1.4 Attentes et limites de l'approche globale

Pour mener une étude à un niveau global, on attend une couverture des données la plus large possible, si possible quasi-totale. Cela nous amène parfois à prendre une résolution spatiale ou temporelle assez grossière. Par exemple dans la cas des crues, nous avons envisagé de prendre des données journalières de précipitation, mais la couverture était insuffisante et nous avons dû nous contenter des données mensuelles.

Le nombre des différentes variables disponibles au niveau global peut-être assez réduit. Dans le cas de régressions statistiques, si plusieurs variables ont des trous dans leur couverture et que ces trous sont disjoints, on est amené rapidement à supprimer des variables faute de quoi l'étude ne serait plus vraiment globale...

Si l'on tient compte de ces limitations et de la qualité des données (homogénéité, fiabilité, précision) qu'il est la plupart du temps impossible d'évaluer, les modèles physiques et statistiques qui vont permettre de traiter ces données doivent être **simples** et **robustes**. Il doivent être le plus possible **automatisables** car la taille des données mises en jeu ne permet pas de traitement manuel des items.

Dans ces conditions, il est clair que les attentes doivent être réduites à l'obtention de tendances, d'influences qualitatives, à des comparaisons grossières, mais en aucun cas, on ne pourra parler de prédictions ou effectuer de comparaison précise entre deux pays. Comme on l'a déjà dit, l'outil statistique pourra donner des résultats au niveau global car il "gommera" les imperfections locales, et le corollaire est qu'aucune conclusion ne devra être tirée au niveau local.

Une fois ces précisions clairement posées, il est assez heureux que nous ayons pu obtenir quelques résultats significatifs, que nous décrivons maintenant.

## 2.2 Concept du *Disaster Risk Index*

En 1990, le Programme de Nations Unies pour le Développement (UNDP), estimant que le niveau de développement d'un pays ne se réduisait pas à une quantité d'argent par habitant (le produit intérieur brut), a construit un indice statistique composite, le *Human Development Index*, intégrant des données qu'on avait jusque là probablement jugées secondaires comme le niveau d'éducation... Cet indice a connu un énorme succès et est depuis très utilisé.

En 2000, le même Programme a voulu un indice similaire pour estimer le niveau de vulnérabilité des populations aux catastrophes naturelles et mieux cibler ses aides. L'UNDP ne disposant cependant pas des moyens, notamment géomatiques, pour élaborer

cet indice, il s'est tourné vers le Programme de Nations Unies pour l'Environnement, plus précisément vers le GRID/Europe, basé à Genève, ce qui a donné lieu au projet GRAVITY (*Global Risk And Vulnerability Index Trends per Year*).

### 2.2.1 Le projet GRAVITY

La première étape a été de définir les notions de risque et de vulnérabilité. D'après une définition des Nations Unies [70],

the risk is a function of hazard occurrence probability, element at risk and vulnerability.

Comme l'étude concernait les impacts sur la population, le terme *element at risk* a été entendu comme la population exposée. Le terme *hazard occurrence* fait référence à la fréquence de retour d'un événement d'une certaine intensité. La vulnérabilité est décrite comme "the degree of loss to each element should a hazard of a given severity occur" [28].

Il a été ensuite fait l'hypothèse que le risque suivait une loi multiplicative comme décrit dans l'équation simplifiée :

$$R = H_{fr} \cdot Pop \cdot Vul \quad (1)$$

où  $R$  est la moyenne du nombre de décès par an, pour le type de désastre considéré,  $H_{fr}$  est la fréquence de ce type de désastre (nombre d'évènements par an),  $Pop$  est la population vivant dans la zone exposée considérée et  $Vul$  est la vulnérabilité qui dépend du contexte socio-politico-économique de la population (nombre sans dimension entre 0 et 1).

Si on définit l'*exposition physique* par  $PhExp = H_{fr} \cdot Pop$ , on obtient  $R = PhExp \cdot Vul$ . Remarquons qu'avec cette définition, une même personne compte plusieurs fois si elle est exposée à plusieurs événements.

La stratégie devenait donc évidente :

Dans un premier temps, pour chaque type de risque, il fallait calculer, par pays, l'exposition physique et en tirer la vulnérabilité, puisqu'on "connaissait" le nombre de décès (en fait, là encore, il est très difficile de connaître précisément ce nombre de décès).

Dans deuxième temps, on devait expliquer à l'aide d'un modèle statistique la vulnérabilité à l'aide des variables socio-économiques.

Il n'y avait plus qu'à... ce qui a pris quelques années et a finalement mené à l'indice recherché.

Les différentes étapes peuvent se voir dans les rapports successifs du projet *Gravity* [5, 8, 9].

### 2.2.2 Le *Disaster Risk Index*

En ce qui concerne l'exposition physique, le calcul est spécifique à chaque type de désastre. Ont été considérés les cyclones, les sécheresses, les tremblements de terre et les

inondations. Les problèmes rencontrés dans l'étude des volcans, notamment à cause du trop petit nombre d'évènements observés dus à la période de retour beaucoup trop grande, n'ont pas permis de traiter ce cas.

Pour chacun de ces types de désastre, il a fallu considérer un modèle physique permettant d'estimer spatialement la zone touchée par le désastre, puis croiser cela avec la couche de population pour en tirer l'exposition physique. Cela s'est avéré un travail assez long car il a fallu, dans un premier temps, comme dans toute étude de ce type, collecter et traiter les données correspondantes. Les modèles physiques nécessitent des données pour lesquelles il n'existait à l'époque aucune base de données globale. Il a alors fallu unifier les bases de données régionales, sachant qu'elles ne comportaient pas les mêmes types d'information et qu'elles n'utilisaient pas les mêmes unités. Dans le cas des cyclones dont nous parlons en détail plus bas, il a fallu développer un logiciel spécifique pour construire cette base de données globale.

Une fois l'exposition physique calculée, il fallait attribuer à chaque évènement les pertes engendrées. Il existait ailleurs une base de donnée globale des désastres avec cette information, que nous avons pu obtenir, mais il a fallu d'abord la nettoyer car elle n'était pas utilisable en l'état et il a surtout fallu la géoréférencer pour la faire correspondre avec les bases de données spécifiques à chaque type de désastre qui nous avaient fourni les variables physiques. On en a alors déduit la vulnérabilité.

La deuxième phase était l'étude statistique que j'ai menée personnellement. Une première tentative menée avant mon arrivée n'avait rien donné. La cause en était probablement la volonté d'utiliser des modèles beaucoup trop sophistiqués, qui nous semblent, comme expliqué plus haut, tout à fait inadaptés à cette approche globale. Une étude des distributions des variables a fait apparaître que tenter des régressions linéaires directement serait sans espoir. Nous avons donc transformé ces variables, la plupart de manière logarithmique mais pas toutes. Il était clair que les modèles obtenus seraient alors à utiliser de manière uniquement qualitative et surtout non prédictive, mais encore une fois, cela l'aurait été même sans les transformations logarithmiques. Une longue et minutieuse analyse statistique a suivi, s'appuyant sur différents critères numériques, l'expérience humaine, de nombreux essais et des validations systématiques par analyse des résidus, pour déterminer la "meilleure" régression dans chaque cas.

En intégrant alors ces différents modèles statistiques obtenus par régression, on a enfin obtenu un indice. Nous avons cependant bien alerté les décideurs des dangers que pouvait présenter l'utilisation inappropriée de cet indice, notamment à des fins de classement précis ou de prédiction.

Le lecteur désirant en savoir plus trouvera un peu plus de détails dans notre article [14] et beaucoup plus de détails, avec de nombreux types de figures mettant en valeurs les phénomènes remarquables et les orientations des mesures concrètes à prendre, dans le rapport final qui a été publié par l'UNDP [10]. Notons que ces deux ouvrages sont libres d'accès sur internet. Nous allons maintenant détailler le traitement des cyclones auquel nous avons activement collaboré.

# Global processing

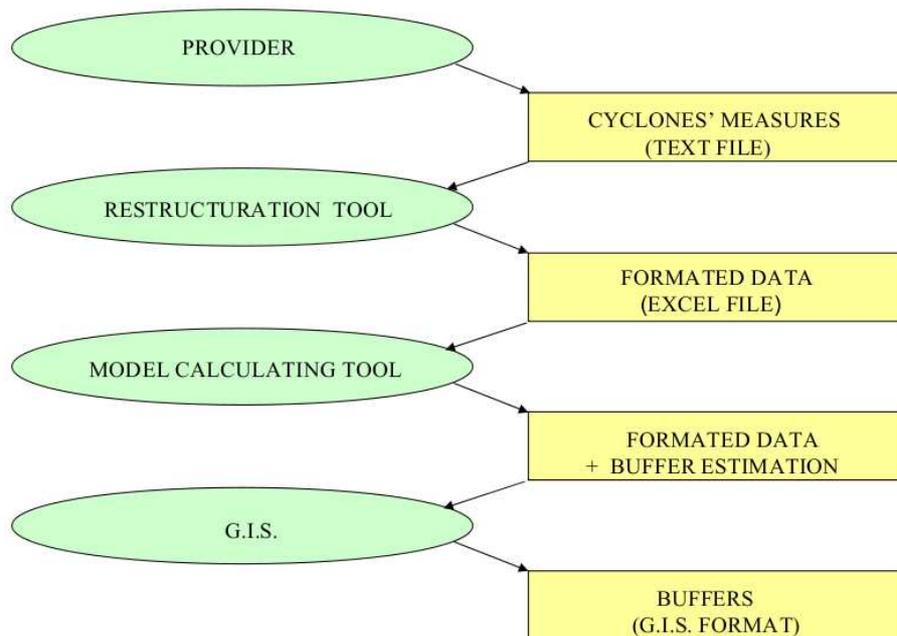


FIGURE 2.1 – Le processus de traitement des données cycloniques

## 2.3 Le cas des cyclones

Ce travail a été mené en collaboration avec Ola Nordbeck, et supervisé par Pascal Peduzzi [6]. Pour calculer l'exposition physique au risque cyclonique, comme pour le cas des autres désastres, nous avons trois étapes : récupérer et unifier les données physiques des cyclones recensées dans les différentes régions du monde, déterminer les aires géographiques (*zones-tampon*) touchées par des vents dépassant un certain seuil, croiser ces zones-tampon avec les couches de population pour obtenir l'exposition. Nous ne détaillerons ici que les deux premières étapes. Le processus est récapitulé sur l'organigramme 2.1.

### 2.3.1 Construction de la base de données globale

Les bases de données régionales existantes étaient toutes sous des formats différents, très variés. Par ailleurs les observations très nombreuses ne permettaient pas une transcription manuelle. Nous avons donc construit un logiciel traitant tous les formats et les convertissant en un format standard permettant de les intégrer dans une unique base de données globale, qui permettait de préserver toutes les informations disponibles. Ce processus aurait pu permettre une sorte d'intégration automatique des nouvelles données arrivant au fil du temps par des connexions entre les bases de données elles-mêmes. À ma connaissance, ce n'est toujours pas le cas et c'est probablement dû à des résistances régionales dans la crainte d'une perte d'autonomie. Cette base de données globale gérée par le GRID/Europe est cependant régulièrement mise à jour, toujours en utilisant le logiciel en question et elle contient aussi évidemment les informations géographiques, c'est-à-dire les trajectoires des cyclones et leurs zones-tampon calculées comme expliqué dans la suite. Ce calcul a été intégré au logiciel ci-dessus, baptisé *Cyclone Database Manager*, qui traite donc successivement les trois étapes : conversion dans un format commun, calcul des zones-tampon et gestion de la base de données globale. Cette base de donnée rend possible des analyses *a posteriori* comme celle du *Disaster Risk Index*.

Seules trois informations étaient fournies par toutes les bases de données : les positions successives de l'œil du cyclone, la pression centrale et la vitesse de vent maximum observée. Nous avons donc opté pour un modèle simple et robuste, en accord avec la philosophie de l'approche globale que nous nous étions fixée au départ.

### 2.3.2 Modèle stationnaire

C'est un modèle paramétrique pour un cyclone dont l'œil est pour l'instant supposé immobile, considéré par beaucoup de spécialistes comme le meilleur parmi les modèles de complexité identique. Il s'agit du modèle de G.J. Holland [50] :

$$V_h(R) = \sqrt{\frac{b}{\rho} \cdot \left(\frac{R_{max}}{R}\right)^b \cdot (P_{env} - P_{centre}) \cdot e^{\left(\frac{R_{max}}{R}\right)^b} + \frac{R^2 f^2}{4} - \frac{Rf}{2}}$$

où

- $V_h(R)$  est la vitesse du vent à distance  $R$  de l'œil ( $ms^{-1}$ );
- $b$  est un paramètre qui change la forme du profil radial (sans dimension);
- $P_{centre}$  est la pression au centre du cyclone (Pa);
- $P_{env}$  est la pression asymptotique environnementale (Pa);
- $R_{max}$  est la distance de l'œil à laquelle le vent est maximal (m);
- $R$  est la distance de l'œil à laquelle on estime le vent (m);
- $\rho$  est la densité de l'air, supposée constante ( $1,15 kg \cdot m^{-3}$ );
- $f$  est le paramètre de Coriolis ( $= 2\omega \sin(lat)$ ) avec  $\omega = 0.0000729 rad \cdot s^{-1}$ , la vitesse angulaire de la terre, et  $lat$  la latitude.

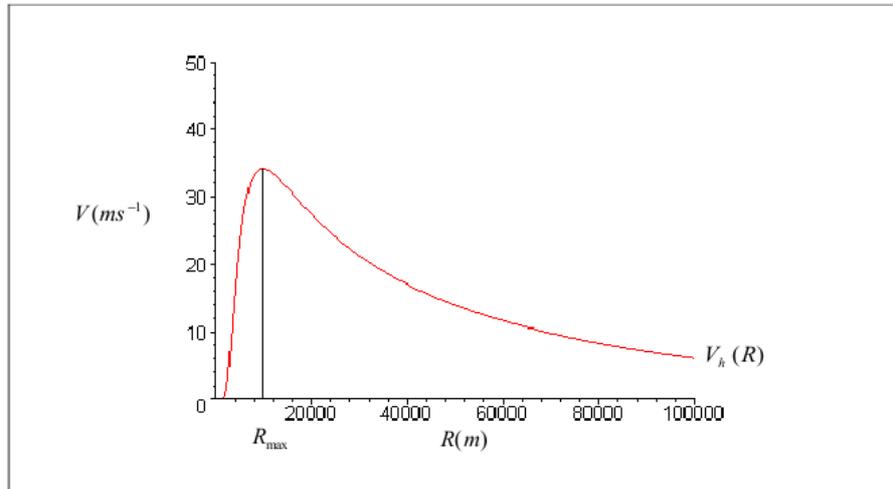


FIGURE 2.2 – Profil des vitesses de vent dans un cyclone

Cela donne un profil de vent qu'on peut voir sur la figure 2.2 (paramètres :  $b = 1.5$ ,  $P_{centre} = 1015 \text{ hPa}$ ,  $P_{env} = 990 \text{ hPa}$ ,  $R_{max} = 10000 \text{ m}$ ,  $lat = 45^\circ$ ).

Le choix du paramètre  $R$ , assez subtil, a été discuté avec des spécialistes de ce modèle. Pour la valeur de  $R_{max}$ , en général non disponible, il a fallu faire une correspondance avec l'échelle de Saphir-Simpson, toujours discutée avec les spécialistes.

Comme les cyclones n'ont pas vraiment tendance à rester sur place, il nous a alors fallu intégrer son déplacement.

### 2.3.3 Modèle dynamique, zones-tampon latérales

Une première approche rapide et facile à intégrer dans les logiciels géomatiques, consistait à construire des zones-tampon symétriques par rapport à la trajectoire en ajoutant simplement la valeur de la vitesse de vent à la vitesse calculée à l'aide du modèle stationnaire.

Nous avons ensuite résolu de faire des calculs vectoriels puisque le vent circulaire du modèle stationnaire est atténué par le déplacement d'un côté et amplifié de l'autre. Remarquons que cette latéralisation est inversée entre l'hémisphère nord et l'hémisphère sud. Nous représentons sur la figure 2.3 le champ de vecteurs en résultant et sur la figure 2.4 une représentation tridimensionnelle des normes des vecteurs vitesses.

Nous avons, à l'aide de cela, construit des zones-tampon latérales. Il y a différents cas à distinguer comme on peut le voir sur la figure 2.5.

## Wind speed Field

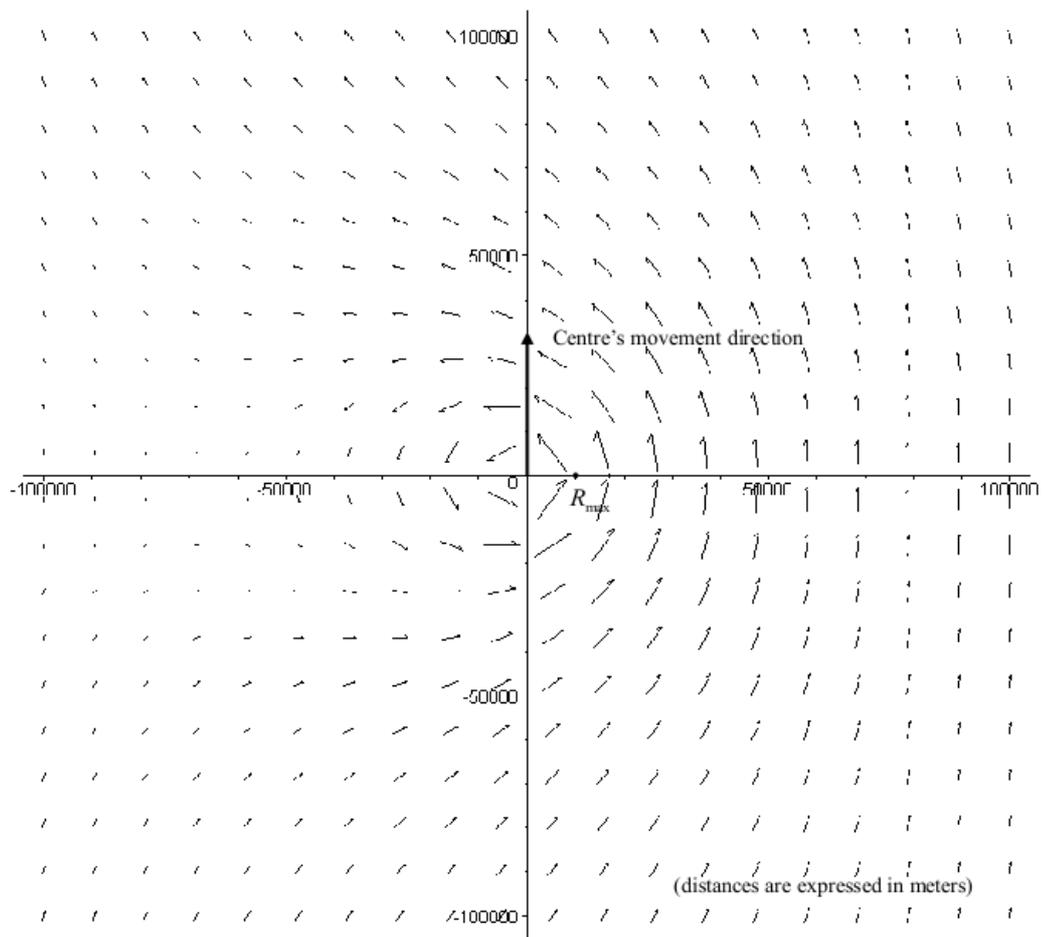


FIGURE 2.3 – Champ des vitesses autour de l'œil du cyclone

### 3-D wind speed intensity with level curves

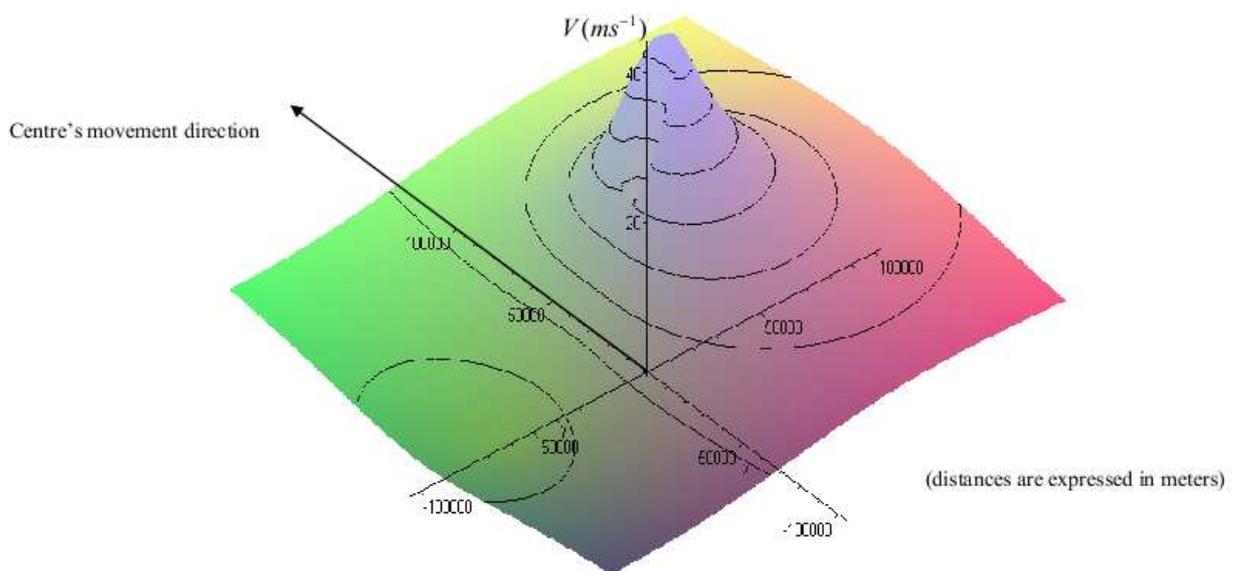


FIGURE 2.4 – Intensité du vent autour de l'œil du cyclone

# Lateral buffers

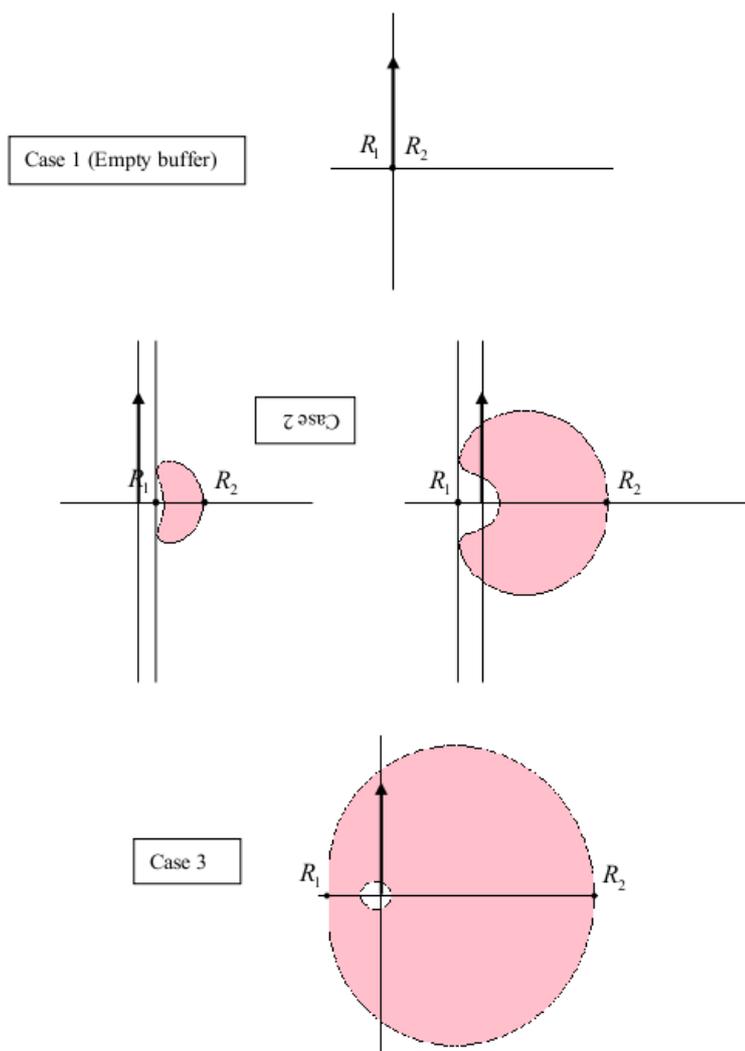


FIGURE 2.5 – Construction des zones-tampon latérales

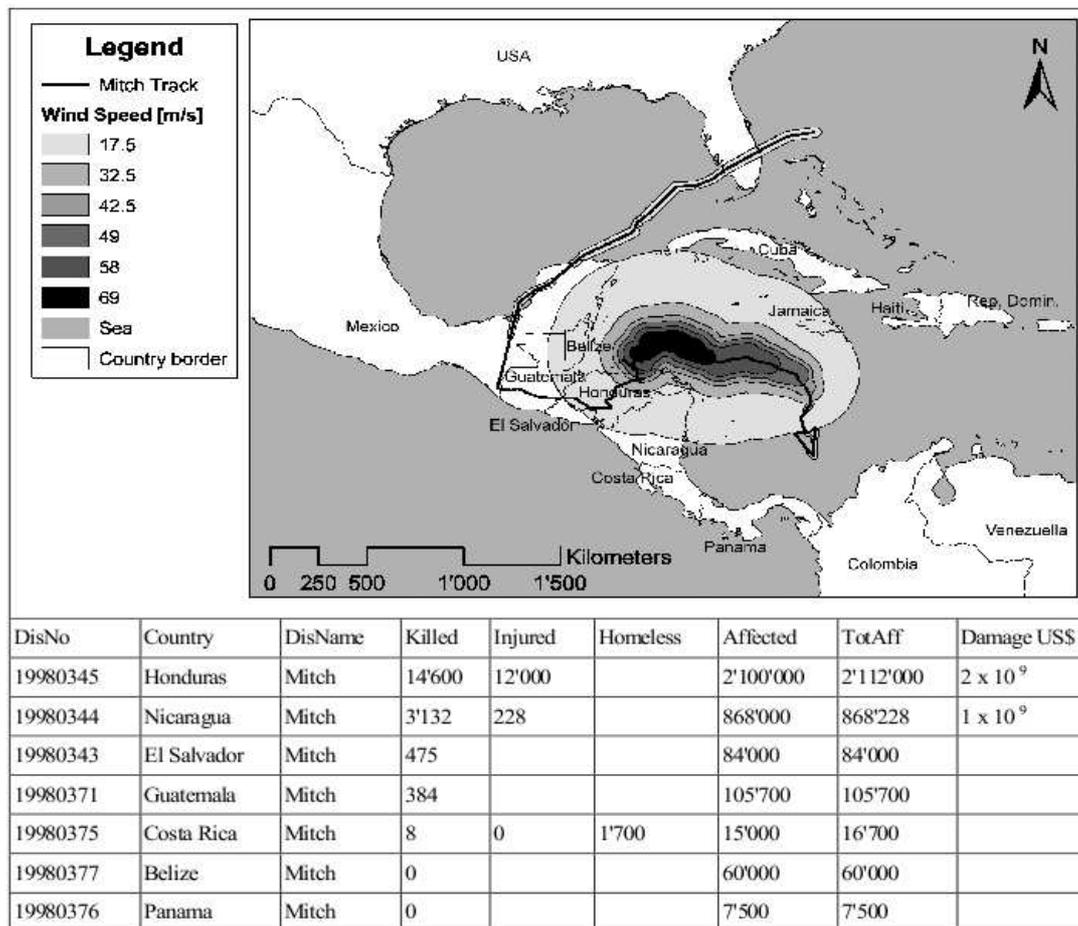


FIGURE 2.6 – Le cyclone Mitch

### 2.3.4 Des zones-tampon latérales aux zones-tampon des trajectoires

À l'aide des zones-tampon latérales, on construit les zones-tampon de trajectoires comme les polygones ayant pour sommets les extrémités des zones-tampon latérales. Les zones-tampon asymétriques qui en résultent n'étaient constructibles directement par aucun des logiciels géomatiques existant. Il a donc fallu leur transmettre ces zones-tampon directement sous forme polygonale, c'est-à-dire que nous avons dû calculer nous-mêmes les coordonnées des sommets de ces polygones. Cela a été l'occasion de faire un peu de géométrie sphérique. Ces coordonnées sont ensuite transmises au logiciel géomatique qui construit les couches des zones-tampon. Au niveau de l'étude globale, ces données sont ensuite reliées aux autres données concernant la population. On peut voir sur la figure 2.6 l'exemple du cyclone Mitch.

## 2.4 Carte mondiale des crues exceptionnelles

Les travaux sur les risques liés aux catastrophes naturelles, notamment le *Disaster Risk Index* [14, 10] et un rapport de la Banque Mondiale [39] (*Disaster Risk Hotspots*) ont permis de tirer certaines conclusions sur la précision des cartes de risque obtenues. Il a été souligné qu'il fallait mettre un effort particulier sur le cas des inondations. La banque mondiale nous a donc mandaté, Christian Herold et moi, pour une étude de faisabilité d'une carte mondiale d'aléas d'inondations en 2005. Le rapport de cette étude [12], consultable sur internet, étudie les différentes pistes pour une telle carte et recommande une méthode, dite des *Statistical Peak-Flow Estimates*. Notre estimation de la charge de travail pour la carte globale était de l'ordre de l'année pour une équipe plus étoffée. Deux ans plus tard, à l'occasion d'un projet mené par l'*International Strategy for Disaster Reduction* (ISDR), composante du Programme des Nations Unies pour le Développement, nommé *Global Assessment Report* (GAR) et prolongement naturel de l'étude sur le *Disaster Risk Index*, avec une plus forte composante de spécialistes universitaires, on a demandé aux deux mêmes personnes, Christian Herold et moi, de construire cette carte globale. Il est fait mention rapidement de cette étude dans le rapport GAR [13, 15], assez général, qui passe très peu de temps sur la technique des études menées pour tous les types de désastres. En revanche, nous soumettrons bientôt un article scientifique sur le sujet [16], dont nous présentons ici les grandes lignes.

### 2.4.1 Présentation

Dans le choix de la méthodologie, une compilation spatiale des événements d'inondations répertoriés ne pouvait pas convenir, car la couverture spatiale des données existantes était insuffisante. Sur proposition de K.L. et J.P. Verdin, hydrologues du EROS Data Center (EROS/USGS) aux États Unis, on a choisi la méthode statistique des *Peak Flow Estimates* (voir par exemple [64]). L'idée principale est d'estimer, pour chaque bassin (versant) d'une certaine taille, la zone inondée correspondant à une crue centenaire, en utilisant le débit centenaire et un modèle numérique de terrain. Pour les bassins ayant une station de mesure proche de leur exutoire, ces débits exceptionnels peuvent être estimés en modélisant statistiquement la série temporelle des débits maximaux annuels. Pour les bassins sans station de mesure, ces débits centenaires peuvent être évalués par des formules de régression, établies à partir de bassins similaires ayant des stations, et expliquant ces débits à l'aide de variables climatiques, hydromorphométriques et de couverture du sol.

Considérant les méthodes statistiques, nous avons une fois de plus choisi la simplicité, car elles devaient être appliquées de nombreuses fois et à des données de très grande taille, et devaient être le plus possible automatisées. Pour l'estimation des débits centenaires à partir des séries temporelles, nous avons à choisir globalement un modèle et des méthodes d'estimations des paramètres. D'après Mkhani et al.[59] : “[...] it is not

possible to identify a parent distribution for the annual maximum floods. Attempts over many years have proved inconclusive”. Cependant deux distributions sont principalement utilisées à cet effet dans la pratique, la distribution GEV (*Generalized Extreme Value*) et la distribution log-Pearson de type III. Les deux ont donné par le passé des résultats acceptables, la comparaison entre les deux dépendant du cas de figure. Bien que les études locales requièrent un choix fin de la distribution comme le soulignent Meigh et al.[58], dans le cas d’une étude globale, nous devons faire un choix global de distribution pour tous les bassins. Nous avons décidé de suivre la méthodologie décrite dans le bulletin 17b du *United States Water Resources Council’s Hydrology Subcommittee* [67], qui utilise la distribution log-Pearson III. Pour l’estimation des paramètres, il y avait plusieurs méthodes et la comparaison n’est pas évidente (voir [41] dans le cas de GEV). Nous avons choisi la méthode des moments, elle aussi conseillée par le bulletin 17b. Cette combinaison de distribution et d’estimation a prouvé sa pertinence dans plusieurs cas [59]. Concernant les régressions, vu le très grand nombre devant être traité, nous avons choisi la méthode la plus simple, à savoir des régressions linéaires pondérées (qui se sont avérées comparables aux *General Linear Models* dans certains cas d’estimations de ce type [51]) après transformation convenable des variables.

Cette méthode d’estimation des zones inondées, appliquée de manière locale, par exemple au niveau des États américains, n’avait jamais été testée au niveau global. Nous avons fait dans l’étude préliminaire [12] des tests sur deux zones, l’une en Amérique du nord et l’autre en Amérique du sud. Ces zones avaient été choisies assez grandes pour pouvoir donner une idée de l’application globale, mais pas trop pour pouvoir terminer l’étude dans un temps raisonnable. Cette étude préliminaire avait montré que la méthode avait quelques chances de fonctionner au niveau global, mais l’issue restait incertaine. Par ailleurs, cette méthode globale concerne seulement les grandes rivières et elle ne prend pas en compte les inondations éclair et les inondations côtières. Les résultats obtenus ne peuvent, **en aucun cas** s’appliquer localement ou pour la planification des sols.

Les estimations des zones inondées ont été faites à l’aide d’un modèle développé par EROS/USGS que nous avons utilisé tel quel. Les résultats obtenus ont été comparés aux évènements répertoriés par le *Dartmouth Flood Observatory* (DFO).

## 2.4.2 Données

Pour cette étude nous avons utilisé les jeux de données suivants

### **Débits**

Elles sont composées de stations géoréférencées et des séries temporelles des débits mensuels moyens. C’est une compilation de jeu de données globaux, régionaux et nationaux provenant de plusieurs centres de recherches. Un effort important a été fourni pour obtenir les données nationales quand cela était possible.

### **Modèles numériques de terrain et produits hydrologiques dérivés**

Trois modèles numériques de terrain ont été utilisés à des étapes différentes de l’étude :

- HYDRO1K (EROS,USGS) a été utilisé pour générer le premier ensemble de variables destiné à l’analyse statistique. La résolution de 1 km et les produits auxiliaires ont été considérés comme tout à fait pertinents pour cette phase de l’analyse ;
- Global Drainage Basin Database (GDBD) a été utilisé dans quelques cas particuliers pour aider à la correction du réseau hydrographique modélisé par Hydro1K ;
- Hydrosheds (WWF, en partenariat avec USGS, CIAT, TNC, CESR) a été utilisé pour calculer les estimations de débits exceptionnels et générer les zones inondées correspondantes. La résolution de 90m a été considérée comme essentielle dans le processus de génération des zones inondées.

### **Couverture du sol**

On a utilisé Global Land Cover GLC\_2000 version 1 (IES *Global Environment Monitoring Unit*) pour générer deux variables différentes : Forest Cover et Impervious Cover (voir table 2.9).

Global Lakes and Wetland Database (GLWD) a été utilisée pour générer la variable Surface Water Storage (voir table 2.9).

Les deux jeux de données nous semblent avoir une précision adéquate pour l’utilisation qu’on en fait ici.

### **Climat**

Les précipitations mensuelles et les températures mensuelles moyennes sont des rasters globaux fournis par la *Climatic Research Unit at University of East Anglia*. Les résolutions spatiales et temporelles nous ont semblé suffisantes pour l’étude.

Les données de précipitations *Variability Analyses of Surface Climate Observations* (VASCLIMO) fournies par le *Global Precipitation Climatology Centre* (GPCC) ont été utilisées pour générer les précipitations exceptionnelles. Ce jeu de donnée a été choisi pour sa fiabilité et son homogénéité temporelle.

Trois cartes de classification climatique ont été utilisées :

- le jeu de donnée Holdridge Life Zones ;
- la “World Map of the Köppen-Geiger climate classification updated” (Université de Vienne) ;
- la “Updated world map of the Köppen-Geiger climate classification” (Université de Melbourne).

Le premier jeu de données avait été utilisé dans l’étude préliminaire. Les deux autres sont des cartes récentes basées sur la célèbre classification de Köppen-Geiger et se sont montrées légèrement plus performantes que la première.

### **Recensement d’inondations**

On a utilisé le “World Atlas of Flooded Lands” fourni par le *Dartmouth Flood Observatory* pour valider les résultats finaux. Comme la seule base de données avec une telle couverture spatiale et temporelle, elle nous a paru essentielle pour cette étude.

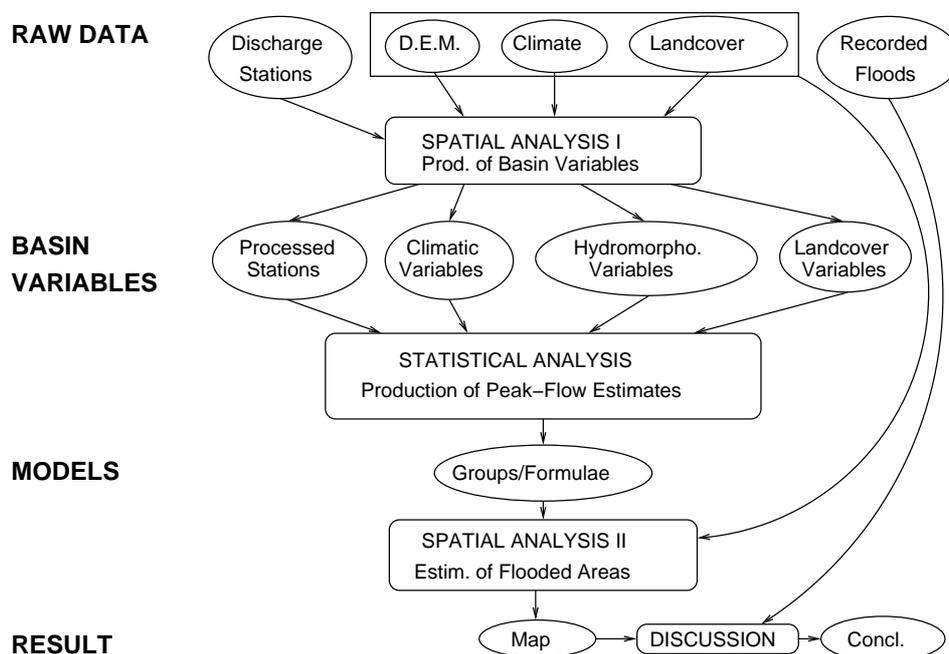


FIGURE 2.7 – Estimation statistique des inondations exceptionnelles : organigramme global

### 2.4.3 Organisation générale

Ce n'est pas ici le lieu pour décrire tous les détails d'un processus dont les grandes lignes ont été évoquées plus haut. Nous nous contenterons de commenter des organigrammes, tirés de l'article en cours de rédaction, qui donnent une idée de la complexité de cette organisation. Le premier organigramme décrit les grandes lignes du processus (voir figure 2.7). On y voit apparaître les trois grandes étapes déjà évoquées plus haut : une première phase d'analyse spatiale pour produire un jeu de variables statistiques associé aux bassins auxquels on a pu rattacher une station de mesure, une deuxième phase d'analyse statistique qui permet de définir des groupes et pour chaque groupe un modèle statistique d'estimation des crues exceptionnelles, une troisième phase d'analyse spatiale qui consiste à calculer les variables sélectionnées pour tous les bassins versants, à estimer leur débit centenaire, ce qui permet enfin d'estimer les zones inondées. Au niveau de la discussion finale, on compare certains résultats avec des observations de DFO.

Nous allons donner une rapide description de ces différentes étapes.

### 2.4.4 Première analyse spatiale

La première analyse spatiale est décrite dans l'organigramme 2.8.

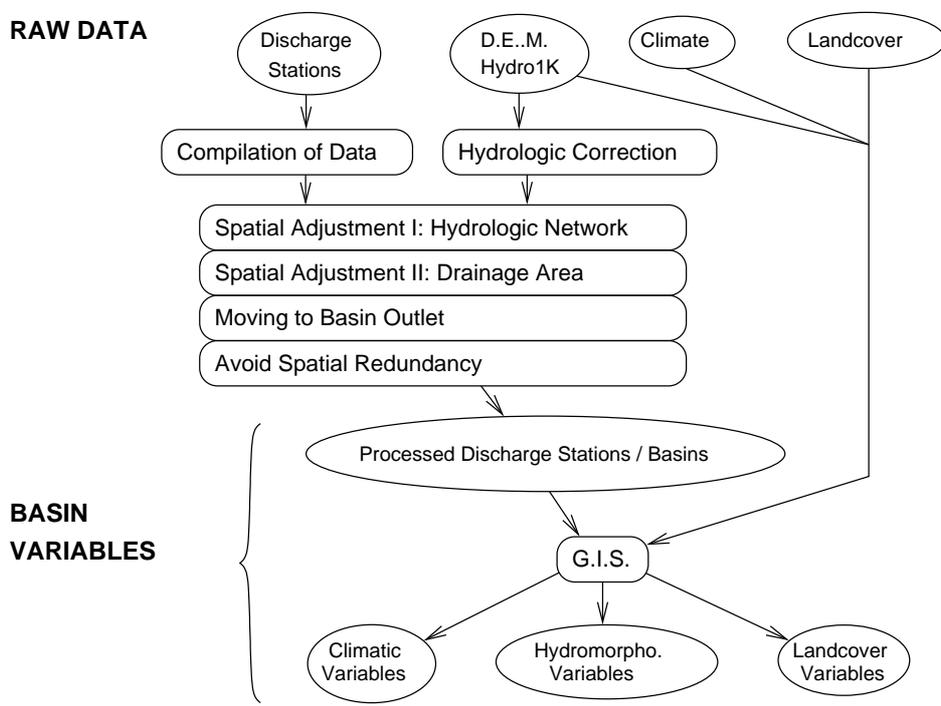


FIGURE 2.8 – Analyse spatiale I : Production des variables des bassins

Comme souvent dans ce genre d'étude, la phase de collecte des données a été très fastidieuse. La plupart des données a été obtenue gracieusement, mais il a fallu faire beaucoup de démarches. Par ailleurs, la taille de certaines, comme le modèle numérique de terrain ou les données raster de précipitations, était très grande ce qui finit par poser de sérieux problèmes de téléchargement. Mais les plus difficiles à obtenir ont été les données de débits. En effet, il existe une base de données globale que nous avons d'ailleurs utilisée, mais qui est très incomplète, et il a fallu négocier directement avec de nombreux pays pour les obtenir.

Il a fallu par la suite compiler toutes ces données de débits. Par ailleurs, le premier modèle numérique de terrain Hydro1K, censé être hydrologiquement correct, comportait encore certaines erreurs qu'il a fallu rectifier.

Une fois obtenus les données de débits et le modèle numérique de terrain, il a fallu relier les deux. Les données de débits sont fournies avec les coordonnées des stations et la superficie de la zone de drainage correspondante. Cependant, le modèle de terrain et les coordonnées des stations comportent tous deux des imprécisions et il faut procéder à un premier ajustement pour que les stations soient vraiment situées sur les cours d'eau, puis un deuxième pour que la zone de drainage corresponde à celle qui est calculée à l'aide du modèle numérique de terrain. Si la différence est trop grande, on supprime la station. Par ailleurs, les stations ne se situent pas toujours aux exutoires de bassins versants et il faut donc fabriquer des stations virtuelles dont on estime les débits par péréquation à l'aide des données réelles. Enfin, pour ne pas fausser l'étude statistique, il faut éviter que certains bassins en contiennent d'autres, quitte à supprimer encore des stations.

Lorsqu'on a stations de mesures et bassins associés, un traitement géomatique un peu plus standard permet d'acquérir toutes les variables voulues correspondant à ces bassins, qui sont regroupées dans la table 2.9.

### **2.4.5 Analyse statistique**

L'analyse statistique est décrite dans l'organigramme 2.10.

L'analyse de fréquence permet d'estimer les débits centennaires à l'aide de la modélisation log-Pearson III. Nous nous sommes aussi servi de ce modèle pour construire une variable de précipitation exceptionnelle. Les transformations de variables ont été logarithmiques pour la plupart. Après cela, la véritable analyse statistique commence d'abord par des études par continent, dans l'idée de ce qui avait été fait dans l'étude préliminaire. Pour chacun, on a essayé de constituer de différentes manières des groupes à l'aide des variables climatiques ou par d'autres méthodes. Après de nombreux essais, on a trouvé des groupes climatiques qui fonctionnaient assez bien.

On alors essayé sans trop y croire des groupes climatiques à l'échelle globale et les résultats étaient encore assez corrects, sauf dans quelques groupes qu'il a fallu un peu subdiviser géographiquement. Ce fait a été une véritable surprise et aussi une bonne nouvelle, d'abord parce que cela rendait le traitement vraiment global (à quelques exceptions

	<b>Variable</b>	<b>Description</b>	<b>Abbreviation</b>
	<b>Hydromorphometric</b>		
1	Drainage area	Area of drainage basin (km <sup>2</sup> ).	DRAREA
2	Mean basin elevation	Mean elevation of drainage basin (m).	MEANALT
3	Mean basin slope	Mean slope of drainage basin (m/km).	MNSLOP
4	Basin shape	Gravelius coefficient of compacity (Kc): ratio of basin perimeter to the circle of equal area.	KGRAV
5	Main channel length	Total length of basin main channel (km).	MCHLENGTH
6	Main channel slope	Maximum difference in elevation of basin main channel divided by channel length (m/km).	MCHSLOPE
7	Drainage frequency	Number of Strahler first order streams per square km in basin (1/km <sup>2</sup> ).	DRFREQ
	<b>Land cover</b>		
8	Surface water storage	Cumulated area of every lake and reservoir contained in GLWD level 3. Variable expressed as a ratio to the basin drainage area.	WATER_STOR
9	Forest cover	Global land cover GLC_2000 version 1: cumulated area of any "Tree Cover" classes and the class "Tree Cover / Other natural vegetation". Variable expressed as a ratio to the basin drainage area.	TFORCOV
10	Impervious cover	Global land cover GLC_2000 version 1: area of class 22 "Artificial surfaces and associated areas". Expressed as a ratio to the basin drainage area.	URBCOV
	<b>Climatic time-series</b>		
11	Mean annual precipitation	Calculated using CRU TS 2.1 dataset on the 1953-2002 period (mm).	PRMEAN
12	Minimum mean monthly temperature	Calculated using CRU TS 2.1 dataset on the 1953-2002 period (°C).	CLDERMONTH
13	Monthly maximum precipitation for a 100-year return period.	Log-Pearson type III estimates using Variability Analyses of Surface Climate Observations (VASClmO) at the Global Precipitation Climatology Centre (GPCC). Version-1.1, 0.5°x0.5°, (mm).	LogP100
	<b>Climatic zones</b>		
14	Percentage area of Köppen-Geiger climatic zones.	Calculated using the World Map of the Köppen-Geiger climate classification updated. University of Veterinary Medicine, Vienna.	Koge5
15	Percentage area of Köppen-Geiger climatic zones.	Calculated using the Updated world map of the Köppen-Geiger climate classification. The University of Melbourne, Victoria, Australia.	Koge1
16	Percentage area of Holdridge climatic zones.	Calculated using the Holdridge Life Zones. IIASA-Laxenburg, Austria.	Holdridge

FIGURE 2.9 – Variables des bassins versants

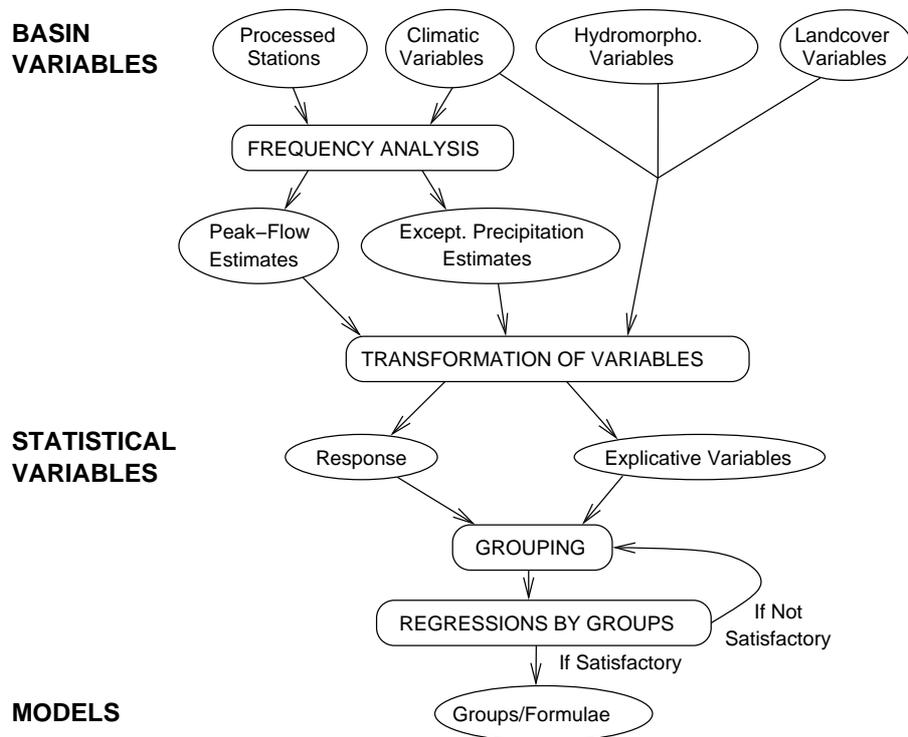


FIGURE 2.10 – Production des modèles statistiques d’estimation des débits exceptionnels

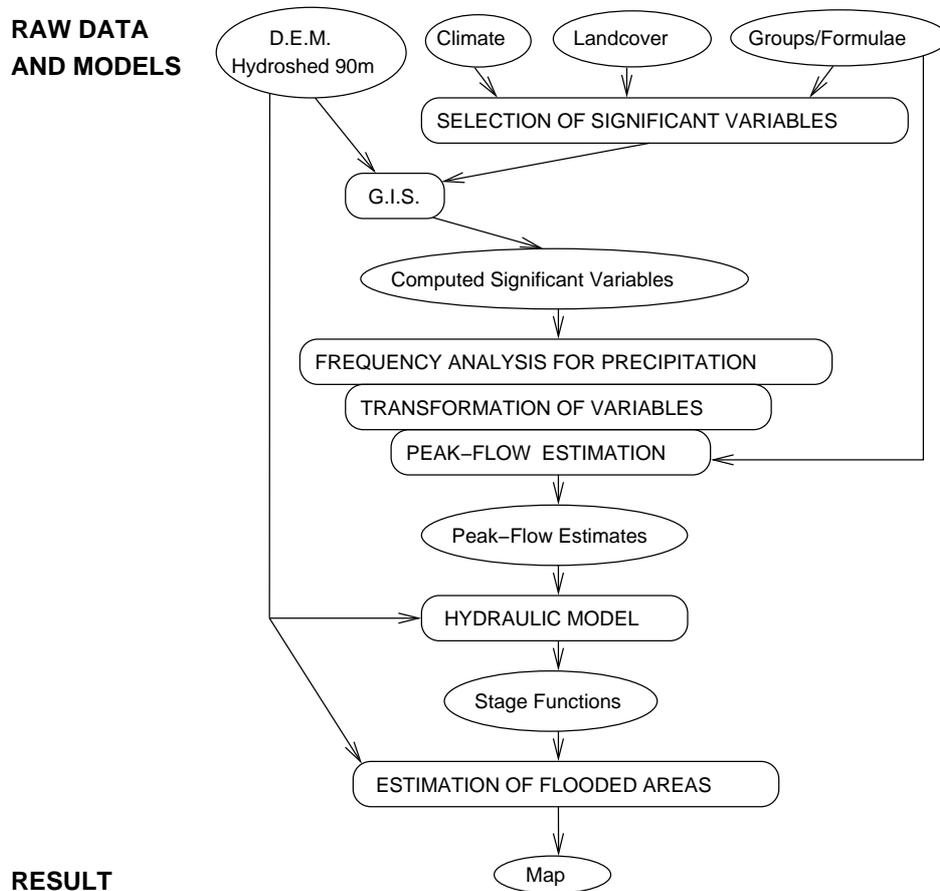


FIGURE 2.11 – Analyse spatiale 2 : Estimation des zones inondées

près), mais aussi parce que cela permettait de palier en partie à la non-uniformité spatiale de la répartition de données.

On a alors raffiné au mieux les régressions et les différents groupes (finalement on en obtient 21), à l'aide non seulement de tous les outils logiciels à notre disposition, mais aussi de nombreux essais, réglages et analyses résiduelles scrupuleuses. On a ainsi obtenu les modèles statistiques correspondant aux 21 groupes.

## 2.4.6 Deuxième analyse spatiale

Commence alors la deuxième analyse spatiale (voir figure 2.11).

Comme le traitement géomatique est énorme, puisqu'on doit calculer cette fois les variables pour tous les bassins versants, on se restreint au calcul des variables qui ont été retenues dans les modèles. On utilise alors le nouveau modèle numérique de terrain Hydrosheds de résolution 90m. Cela a nécessité de faire tourner plusieurs machines en

parallèle pendant des semaines. Une fois les variables obtenues, on calcule les estimations données par les modèles de régression.

À cette étape, on a une estimation du débit centenaire pour chaque bassin versant. On utilise alors le modèle mis à disposition par EROS/USGS pour établir les zones inondées correspondantes.

### 2.4.7 Conclusion

En conclusion, cette étude était une première tentative pour appliquer la méthode des *Peak Flow Estimates* à l'échelle globale. Elle a demandé un effort considérable dans la collecte et la compilation des données (surtout les données de débits) provenant de sources variées et dans le traitement géomatique (dues en particulier à l'utilisation du récent modèle numérique de terrain Hydrosheds90m). L'analyse statistique a montré la possibilité de constituer des groupes au niveau global. Les résultats ont été utilisés pour le rapport GAR mais ne doivent être utilisés ni à une échelle locale, ni pour des prédictions.

En ce qui concerne les améliorations futures, le plus important serait d'avoir des jeux de données de débits initiaux de meilleure qualité, plus denses (spatialement et temporellement) et plus homogènes. L'idéal serait de pouvoir utiliser des données journalières au lieu de données mensuelles. Ces données existent pour beaucoup de pays, mais sont très difficiles à obtenir.

Le processus géomatique serait aussi amélioré si l'on pouvait prendre en compte l'effet du *river burning* sur les zones inondées : ce procédé consiste en effet à creuser artificiellement le modèle numérique de terrain pour être sûr que les cours d'eau découlant de ce modèle de terrain correspondent bien aux cours d'eau réels. On pourrait aussi faire un sous-classement des bassins en fonction de leur aire : pour l'instant les bassins considérés sont tous ceux appartenant à une même classe de la hiérarchie hydrologique, indépendamment de leur taille. Cependant, pour conserver des échantillons statistiques de taille raisonnable, cela n'est possible que si les données initiales de débits sont plus fournies. On pourrait aussi prendre dès le départ le modèle Hydrosheds90m, qui n'était pas disponible en totalité au début de notre étude.

L'analyse statistique dépend beaucoup de la qualité et de la quantité des données. Il est raisonnable de penser qu'une amélioration des données permettra une analyse plus fine. En revanche, pour l'instant, il nous semble que changer de distribution ou de méthode d'estimation des paramètres aurait peu d'impact sur le résultat.

# Chapitre 3

## Autres travaux

On décrit ici les résultats ou recherches en cours ne rentrant pas dans les catégories précédentes.

### 3.1 Triangulations de polygones

Un travail en collaboration avec Roland Bacher sur la combinatoire des triangulations de polygones sera bientôt soumis [4].

Pour les polygones strictement convexes, il est bien connu que cette combinatoire est donnée par les nombres de Catalan.

On considère dans un premier temps des polygones convexes au sens large, c'est-à-dire qu'on autorise des alignements de trois sommets et plus. On peut voir un tel polygone comme un polygone strictement convexe auquel on a rajouté des sommets supplémentaires à l'"intérieur" des arêtes. Nous appellerons donc *arêtes* les arêtes du polygone strictement convexe associé et on appelle *longueur* d'une arête le nombre de sommets situés sur cette arête moins 1. On définit alors à l'aide d'une formule des polynômes qu'on appelle *polynômes d'arêtes*, dépendant uniquement de la longueur de l'arête. Ces polynômes vérifient une relation de récurrence qui permet de les calculer de manière itérative.

Le premier résultat est que le polynôme des triangulations du polygone (convexe au sens large) de départ s'exprime alors de manière très esthétique en fonction des polynômes d'arêtes. On en déduit d'ailleurs que ce polynôme et donc la combinatoire des triangulations, ne dépendent nullement de l'ordre des arêtes, ce qui n'était pas évident *a priori*.

On définit ensuite les polygones presque convexes comme des perturbations de polygones convexes au sens large. On peut alors définir des polygones de *presque arêtes* tels que la formule du premier résultat soit encore vérifiée pour les polygones presque convexes.

Tous ces résultats sont effectifs : on décrira dans un article ultérieur différents algorithmes pour le calcul de ces polynômes. Si le cas général est de complexité exponentielle,

nous décrivons un algorithme polynomial dans le cas des presque-arêtes *convexes*.

## 3.2 Vitesses de fuite

Je me suis aussi intéressé à l'étude des vitesses de fuite des marches aléatoires sur des groupes, notamment les groupes de surfaces. Obtenir une formule par le biais d'une solution implicite d'un système d'équations comme c'est le cas pour les arbres périodiques (Takacs [69]) ou par des équations de transport comme dans le cas de certains groupes (Mairesse–Mathéus [55]) a résisté aux tentatives et me semble désormais sans espoir. En revanche, j'ai développé une approche numérique qui devrait fournir des encadrements précis de la vitesse de fuite.

Nous avons, Frédéric Mathéus et moi le projet d'étudier l'inégalité fondamentale pour la marche simple sur le groupe de la surface de genre 2. Cette inégalité relie la vitesse de fuite, l'entropie asymptotique de la marche et la croissance du groupe et c'est parfois une égalité. Nous voulons tester l'égalité dans ce cadre par des méthodes numériques en utilisant celles évoquées plus haut pour la vitesse et en développant d'autres pour les entropies.

## 3.3 Travaux divers

### 3.3.1 Survol des groupes automatiques

J'ai écrit pendant ma thèse un article de survol des groupes automatiques [17]. C'était un domaine en plein essor et le livre d'Epstein et al. [46] sur le sujet était encore à l'état d'embryon. Ma seule contribution originale était la démonstration explicite d'un lemme connu de tous, qu'on ne trouvait nulle part, concernant les quasi-géodésiques en courbure négative.

### 3.3.2 Modélisation des transports

J'ai collaboré pendant mon séjour genevois avec l'Office Fédéral de la Statistique sur le sujet des transport routiers. Il s'agissait de tester plusieurs déclinaisons du modèle de Zeger dans le cas des comptages routiers. Nous avons décrit en détail ces différentes méthodes, programmé les algorithmes en Matlab, les avons fait tourner sur des jeux de données de très grande taille. Les modèles se sont malheureusement avérés très lents à converger, voire instables, et inadaptés à ce problème. Nous avons cependant écrit un rapport conséquent [7].

### **3.3.3 Anesthésiologie**

J'ai aussi collaboré avec des médecins sur la validation d'un questionnaire destiné aux patients nécessitant des traitements anti-douleur lourds. La douleur est ressentie et exprimée de façon très différente suivant les individus et elle est donc très difficile à estimer. Le questionnaire en question devait permettre une telle évaluation, mais sur la base de réponses très qualitatives. J'ai aidé ces médecins à analyser les résultats de ce questionnaire. Ce travail a fait l'objet d'une communication dans un grand congrès d'anesthésiologie avec publication d'une courte note [11].



# Bibliographie

## Liste pour l'habilitation à diriger des recherches

### Mathématiques fondamentales

- [1] F. Mouton. Comportement asymptotique des fonctions harmoniques sur les arbres. *Séminaire de Probabilités, Université de Strasbourg, XXXIV* :353–373, 2000.
- [2] F. Mouton. Local fatou theorem and the density of energy on manifolds of negative curvature. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 23 :1–16, 2007.
- [3] F. Mouton. Non-tangential, radial and stochastic asymptotic properties of harmonic functions on trees. Preprint, 2010.
- [4] R. Bacher and F. Mouton. Triangulations of nearly convex polygons. Preprint, 2010.

### Applications

- [5] P. Peduzzi, H. Dao, C. Herold, and F. Mouton. Global Risk And Vulnerability Index Trends per Year (GRAVITY), Phase II : Development, analysis and results. UNEP/UNDP, 56 p., 2002  
[www.grid.unep.ch/product/publication/download/ew\\_gravity2.pdf](http://www.grid.unep.ch/product/publication/download/ew_gravity2.pdf).
- [6] F. Mouton, O. Nordbeck, and P. Peduzzi. Cyclone Database Manager, a tool for converting point data from cyclone observations into tracks and windspeed profiles in a G.I.S. Project for Risk Evaluation, Vulnerability, Information and Early Warning, UNEP/GRID-GENEVA and Université de Genève, Département de Géographie, 40 p., 2002.
- [7] A.F. Guatierotti, F. Mouton, and F.X. De Rossi. La modélisation des transports : le cas des comptages routiers. Office Féd. de la Statistique, 213 p., 2002.
- [8] P. Peduzzi, H. Dao, C. Herold, and F. Mouton. Global Risk And Vulnerability Index Trends per Year (GRAVITY), Phase III : Development, analysis and results. UNEP/UNDP, 29 p., 2003  
[www.grid.unep.ch/product/publication/download/ew\\_gravity3.pdf](http://www.grid.unep.ch/product/publication/download/ew_gravity3.pdf).

- [9] P. Peduzzi and H. Dao , with contribution of F. Mouton. Global Risk And Vulnerability Index Trends per Year (GRAVITY), Phase IV : Annexe to WVR and Multi Risk Integration. UNEP, 45 p., 2003  
www.grid.unep.ch/product/publication/download/ew\_gravity4.pdf.
- [10] P. Peduzzi, H. Dao, F. Mouton, and C. Herold. Statistical Team for *reducing disaster risk*, a challenge for Development. UNDP, New York, 146 p., 2004  
www.undp.org/bcpr/disred/english/publications/rdr.htm.
- [11] A. Cahana, J. Gaudet, F. Mouton, H. Weibel, and P. Mavrocordatos. Validation of the French Version of the “ASA Nine Outcome Measure Questionnaire” (ASA 9Q) in a University Based Interventional Pain Unit. American Society of Anesthesiologists Annual Meeting Abstracts, A-1366, 2004.
- [12] C. Herold and F. Mouton. Global Flood Modeling : Statistical estimates of peak-flow magnitude. World Bank Development Research Group - UNEP/GRID-Europe, 37 p., 2006  
www.grid.unep.ch/product/publication/download/article\_global\_flood\_modeling.pdf.
- [13] C. Herold and F. Mouton. Statistical estimates of peak-flow magnitude, contribution in Global Assessment Report on Disaster Risk Reduction. United Nations International Strategy for Disaster Reduction Secretariat, 207 p., 2009  
www.preventionweb.net/english/hyogo/gar/report/.
- [14] P. Peduzzi, H. Dao, C. Herold, and F. Mouton. Assessing global exposure and vulnerability towards natural hazards : the Disaster Risk Index. Nat. Hazards Earth Syst. Sci., 9, 1149-1159, 2009.
- [15] P. Peduzzi, B. Chatenoux, H. Dao, A. De Bono, U. Deichmann, G. Giuliani, C. Herold, B. Kalsnes, S. Kluser, F. Lovholt, B. Lyon, A. Maskrey, F. Mouton, F. Nadim, and H. Smebye. The Global Risk Analysis for the 2009 Global Assessment Report on Disaster Risk Reduction. Extended Abstract for International Disaster and Risk Conference, Davos, Switzerland, 2010.
- [16] C. Herold and F. Mouton. Global flood hazard mapping using statistical peak-flow estimates, 2010. Preprint.

## **Publications issues de la thèse**

- [17] F. Mouton. Groupes automatiques et courbure négative. *Sém. de théorie spectrale et géométrie*, 8 :37–52, 1989-90.
- [18] F. Mouton. Convergence non-tangentielle des fonctions harmoniques en courbure négative. Thèse de Doctorat, Grenoble, 1994.
- [19] F. Mouton. Comportement asymptotique des fonctions harmoniques en courbure négative. *Comment. Math. Helvetici*, 70 :475–505, 1995.

## Autres références

- [20] A. Ancona. Negatively curved manifolds, elliptic operators and the Martin boundary. *Ann. of Math.*, 125 :495–536, 1987.
- [21] A. Ancona. Positive harmonic functions and hyperbolicity. In J. Král et al., editor, *Potential Theory, Surveys and Problems*. Springer Lect. Notes in Math. 1344, Berlin, 1988.
- [22] A. Ancona. Théorie du potentiel sur les graphes et les variétés. In P.L. Hennequin, editor, *École d'été de probabilités de Saint-Flour XVIII*. Springer Lect. Notes in Math. 1427, Berlin, 1990.
- [23] M.T. Anderson. The Dirichlet problem at infinity for manifolds of negative curvature. *J. Diff. Geometry*, 18 :701–721, 1983.
- [24] M.T. Anderson and R. Schoen. Positive harmonic functions on complete manifolds of negative curvature. *Ann. of Math.*, 121 :429–461, 1985.
- [25] H. Arai. Boundary behavior of functions on complete manifolds of negative curvature. *Tohoku Math. J.*, 41 :307–319, 1989.
- [26] H. Arai. Hardy spaces, carleson measures and a gradient estimate for the harmonic functions on negatively curved manifolds. In *Taniguchi Conference on Mathematics Nara '98*, volume 31, pages 1–49. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2001.
- [27] L. Atanasi and M.A. Picardello. The lusin area function and local admissible convergence of harmonic functions on homogeneous trees. *Trans. of A.M.S.*, 360 :3327–3343, 2008.
- [28] P. Blaikie, T. Cannon, I. Davis, and B. Wisner. *At Risk : Natural Hazards, Peoples Vulnerability, and Disasters*. Routledge, London, 1994.
- [29] J. Brossard. Utilisation du mouvement brownien à l'étude du comportement à la frontière des fonctions harmoniques dans un demi-espace. Thèse de troisième cycle, Grenoble, 1977.
- [30] J. Brossard. Comportement non-tangentiel et comportement brownien des fonctions harmoniques dans un demi-espace. Démonstration probabiliste d'un théorème de Calderon et Stein. *Séminaire de Probabilités, Université de Strasbourg*, XII :378–397, 1978.
- [31] J. Brossard. Densité de l'intégrale d'aire dans  $\mathbf{R}_+^{n+1}$  et limites non tangentielles. *Invent. math.*, 93 :297–308, 1988.
- [32] A.P. Calderón. On a theorem of Marcinkiewicz and Zygmund. *Trans. of A.M.S.*, 68 :55–61, 1950.
- [33] A.P. Calderón. On the behaviour of harmonic functions at the boundary. *Trans. of A.M.S.*, 68 :47–54, 1950.

- [34] L. Carleson. On the existence of boundary values for harmonic functions in several variables. *Archiv für Math.*, 4 :393–399, 1961.
- [35] P. Cartier. Fonctions harmoniques sur un arbre. In *Symposia Mathematica*, volume IX, pages 203–270. Academic Press, London and New-York, 1972.
- [36] S.-Y. Cheng and S.-T. Yau. Differential equations on riemannian manifolds and their geometric applications. *Comm. Pure Appl. Math.*, 28 :333–354, 1975.
- [37] P. Cifuentes and A. Korányi. Admissible convergence in cartan-hadamard manifolds. *J. Geom Anal.*, 11 :233–239, 2001.
- [38] Y. Derriennic. Marche aléatoire sur le groupe libre et frontière de Martin. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, 32 :261–276, 1975.
- [39] M. Dilley, R. Chen, U. Deichmann, A. Lerner-Lam, and M. Arnold. Natural disaster hotspots : A global risk analysis. Hazard Management Unit, World Bank, Washington, DC., 2005.
- [40] J.L. Doob. Conditional brownian motion and the boundary limits of harmonic functions. *Bull. de la S.M.F.*, 85 :431–468, 1957.
- [41] D.J. Dupuis. Parameter and quantile estimation for the generalized extreme-value distribution : a second look. *Environmetrics* 10 : 11-124, 1999.
- [42] R. Durrett. *Brownian Motion and Martingales in Analysis*. Wadsworth Advanced Books & Software, 1984.
- [43] E.B. Dynkin. Boundary theory of markov processes (the discrete case). *Russ. Math. Surv.*, 24 :1–42, 1969.
- [44] E.B. Dynkin and M.B. Maljutov. Random walks on groups with a finite number of generators. *Soviet Math. Dokl.*, 2 :399–402, 1961.
- [45] P. Eberlein and B. O’Neill. Visibility manifolds. *Pac. J. Math.*, 46 :45–109, 1973.
- [46] D.B.A. Epstein, J.W. Cannon, D.F. Holt, S.V.F. Levy, M.S. Paterson, and W.P. Thurston. *Word processing in groups*. Jones & Bartlett, 1992.
- [47] Pierre Fatou. Séries trigonométriques et séries de Taylor. *Acta Math.*, 30 :335–400, 1906.
- [48] É. Ghys and P. de la Harpe. *Sur les groupes hyperboliques d’après M. Gromov*. Birkhäuser, 1990.
- [49] R.F. Gundy and M.L. Silverstein. The density of the area integral in  $\mathbf{R}_+^{n+1}$ . *Ann. Inst. Fourier*, 35-1 :215–229, 1985.
- [50] G.J. Holland. An analytic model of the wind and pressure profiles in hurricanes. *Monthly Weather Review*, 108 : 1212-1218. American Meteorological Society, 1980.
- [51] T.R. Kjeldsen, J.C. Smithers, and R.E. Schulze. Flood frequency analysis at ungauged sites in the kwazulu-natal province, south africa. *Water SA*, 27 (3) : 315-324, 2001.

- [52] A. Korányi, M.A. Picardello, and M.H. Taibleson. Hardy spaces on non-homogeneous trees. In *Symposia Mathematica*, volume XXIX, pages 205–254. Academic Press, London and New-York, 1987.
- [53] A. Korányi and R.B. Putz. Local Fatou theorem and area theorem for symmetric spaces of rank one. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 224 :157–168, 1976.
- [54] A. Korányi and R.B. Putz. An area theorem for products of symmetric spaces of rank one. *Bull. Sc. math.*, 105 :3–16, 1981.
- [55] J. Mairesse and F. Mathéus. Random walks on free products of cyclic groups. *J. London Math. Soc.*, 0 : jdl006v1-20, 2007.
- [56] J. Marcinkiewicz and A. Zygmund. A theorem of Lusin. *Duke Math. J.*, 4 :473–485, 1938.
- [57] H.P. McKean. *Stochastic Integrals*. New York, London, Academic Press, 1969.
- [58] J.R. Meigh, F.A.K Farquharson, and J.V. Sutcliffe. A worldwide comparison of regional flood estimation methods and climate. *Hydrological Sciences*, 42 (2) : 225-244, 1997.
- [59] S.H. Mkhandi, R.K. Kachroo, and T.A.G. Gunasekara. Flood frequency analysis of southern africa : ii. identification of regional distributions. *Hydrol. Sci. J.*, 45 (3) : 449-466, 2000.
- [60] M.A. Picardello and W. Woess. Finite truncations of random walks on trees. In *Symposia Mathematica*, volume XXIX, pages 255–265. Academic Press, London and New-York, 1987.
- [61] M.A. Pinsky. Stochastic riemannian geometry. In A.T. Bharucha-Reid, editor, *Probabilistic Analysis and Related Topics*. Academic Press, 1978.
- [62] J.-J. Prat. Étude asymptotique et convergence angulaire du mouvement brownien sur une variété à courbure négative. *C.R.A.S. Paris*, 280 :A.1539–A.1542, 1975.
- [63] I.I. Privalov. Sur les fonctions conjuguées. *Bull. Soc. Math. France*, pages 100–103, 1916.
- [64] S.K. Sando. Techniques for Estimating Peak-Flow Magnitude and Frequency Relations for South Dakota Streams. Water-Resources Investigation Report 98-4055, USDI/USGS, 1998.
- [65] D.C. Spencer. A function theoretic identity. *Amer. J. Math.*, 65 :147–160, 1943.
- [66] E.M. Stein. On the theory of harmonic functions of several variables II. *Acta Math.*, 106 :137–174, 1961.
- [67] United States Water Resources Council’s Hydrology Subcommittee. Bulletin 17b : Guidelines for determining flood flow frequency. 194 p., 1982.
- [68] D. Sullivan. The Dirichlet problem at infinity for a negatively curved manifold. *J. of Diff. Geom.*, 18 :723–732, 1983.

- [69] C. Takacs. Biased random walks on directed trees. *P.T.R.F.*, 111 :123–139, 1998.
- [70] UNDRO. Natural Disasters and Vulnerability Analysis : Report of Expert Group Meeting. 9–12 July, 1979.