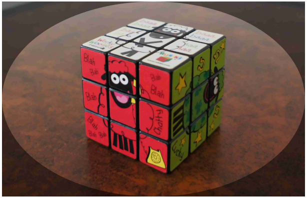
# Soutenance de HDR

Frédéric Mouton

INSTITUT FOURIER (Grenoble)

13 décembre 2010



Point de vue hyperbolique sur le comportement asymptotique des fonctions harmoniques
et
Analyse globale des données environnementales

Point de vue hyperbolique sur le comportement asymptotique des fonctions harmoniques

et

Analyse globale des données environnementales

(L’arbre et le cyclone)

# Fonctions harmoniques
# et
# géométrie hyperbolique

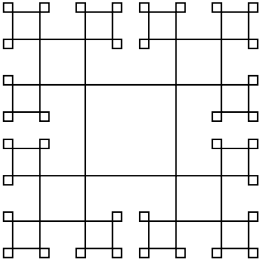
# Fonctions harmoniques

# Fonctions harmoniques

$u$ harmonique ($\Delta u = 0$) $\iff$ propriété de la moyenne

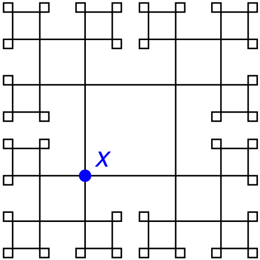
# Fonctions harmoniques

$u$ harmonique ($\Delta u = 0$) $\iff$ propriété de la moyenne



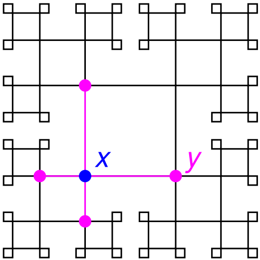
# Fonctions harmoniques

$u$ harmonique $(\Delta u = 0) \iff$ propriété de la moyenne



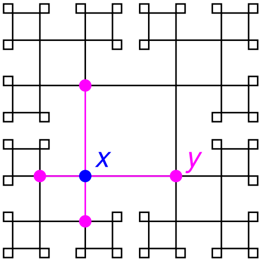
# Fonctions harmoniques

$u$ harmonique ($\Delta u = 0$) $\iff$ propriété de la moyenne



# Fonctions harmoniques

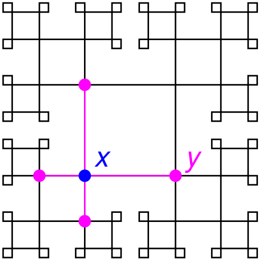
$u$ harmonique ($\Delta u = 0$) $\iff$ propriété de la moyenne



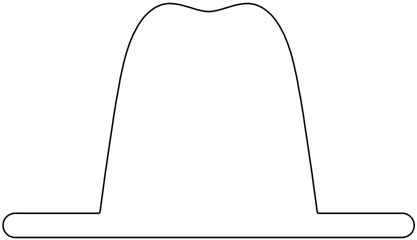

$$u(x) = \frac{1}{4} \sum_{y \sim x} u(y)$$

# Fonctions harmoniques

$u$ harmonique ($\Delta u = 0$) $\iff$ propriété de la moyenne

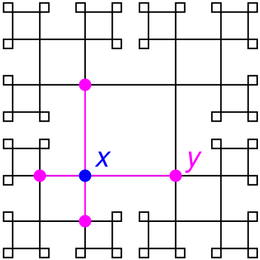


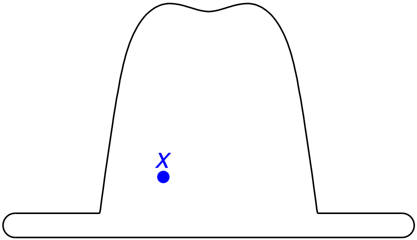

$$u(x) = \frac{1}{4} \sum_{y \sim x} u(y)$$



# Fonctions harmoniques

$u$ harmonique ($\Delta u = 0$) $\iff$ propriété de la moyenne

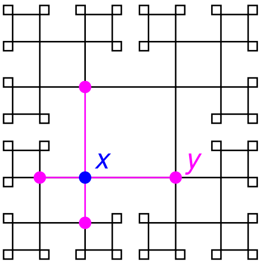


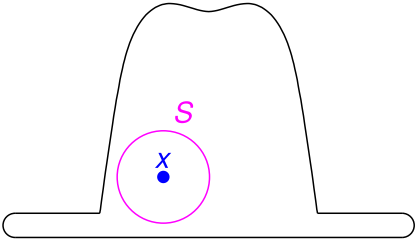

$$u(x) = \frac{1}{4} \sum_{y \sim x} u(y)$$

# Fonctions harmoniques

$u$ harmonique ($\Delta u = 0$) $\iff$ propriété de la moyenne

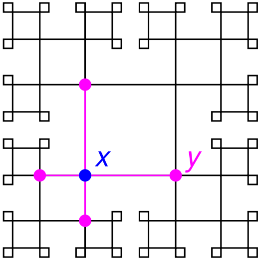


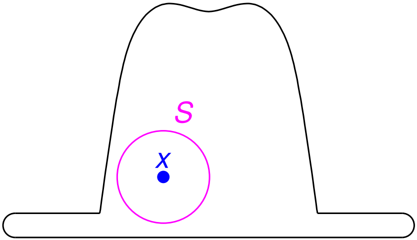

$$u(x) = \frac{1}{4} \sum_{y \sim x} u(y)$$



# Fonctions harmoniques

$u$ harmonique ($\Delta u = 0$) $\iff$ propriété de la moyenne



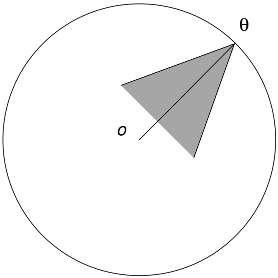




$$u(x) = \frac{1}{4} \sum_{y \sim x} u(y)$$

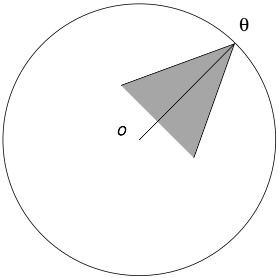
$$u(x) = \fint_S u(y)dy$$

# Théorème de Fatou (1906)

# Théorème de Fatou (1906)



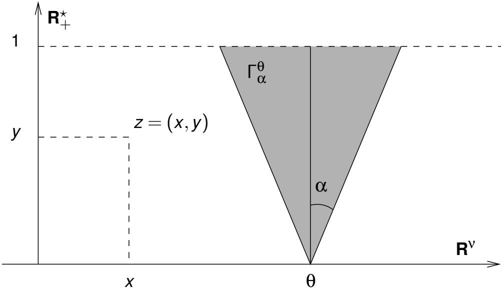
# Théorème de Fatou (1906)



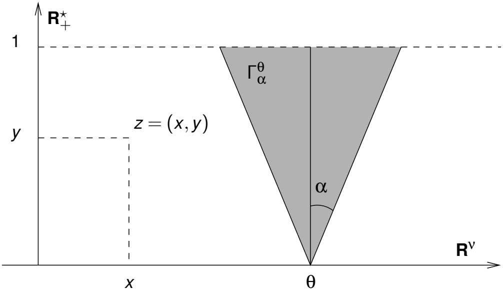

Si $u \geq 0$, il y a une limite *non-tangentielle* en presque tout point du bord.

# Théorème de Calderon-Stein

# Théorème de Calderon-Stein



# Théorème de Calderon-Stein




Pour presque tout point $\theta$ du bord, sont équivalentes :

1. $\forall \alpha < \pi/2$, $\lim_{z\to\theta, z\in\Gamma_\alpha^\theta} u(z)$ existe
2. $\forall \alpha < \pi/2$, $u$ est bornée sur $\Gamma_\alpha^\theta$
3. $\forall \alpha < \pi/2$, $\int_{\Gamma_\alpha^\theta} |\nabla u(x,y)|^2 y^{1-\nu} dxdy < +\infty$.

# Problématique initiale

# Problématique initiale

**Remarque** : plusieurs de ces objets ont une expression plus naturelle si on munit le demi-espace de la métrique hyperbolique de Poincaré. Le plus remarquable est que l'**intégrale d'aire** devient une **énergie** :

$$\int_{\Gamma_\alpha^\theta} |\nabla u(x,y)|^2 y^{1-\nu} dxdy = \int_{\Gamma_\alpha^\theta} |\nabla_{hyp} u|^2_{hyp} dv_{hyp}.$$

# Problématique initiale

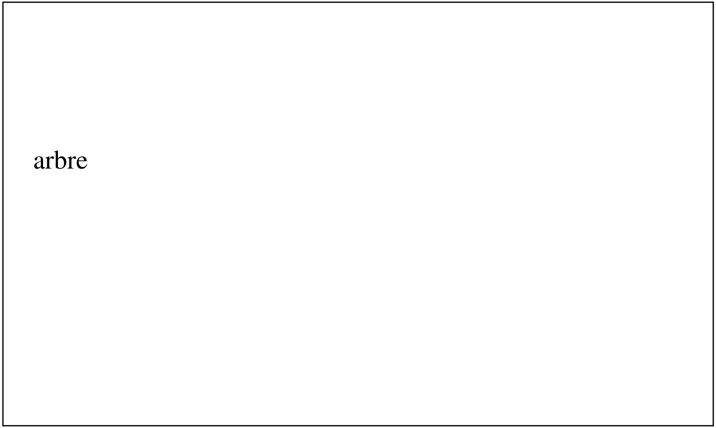
**Remarque** : plusieurs de ces objets ont une expression plus naturelle si on munit le demi-espace de la métrique hyperbolique de Poincaré. Le plus remarquable est que l'**intégrale d'aire** devient une **énergie** :

$$\int_{\Gamma_\alpha^\theta} |\nabla u(x,y)|^2 y^{1-\nu} dxdy = \int_{\Gamma_\alpha^\theta} |\nabla_{hyp} u|_{hyp}^2 dv_{hyp}.$$

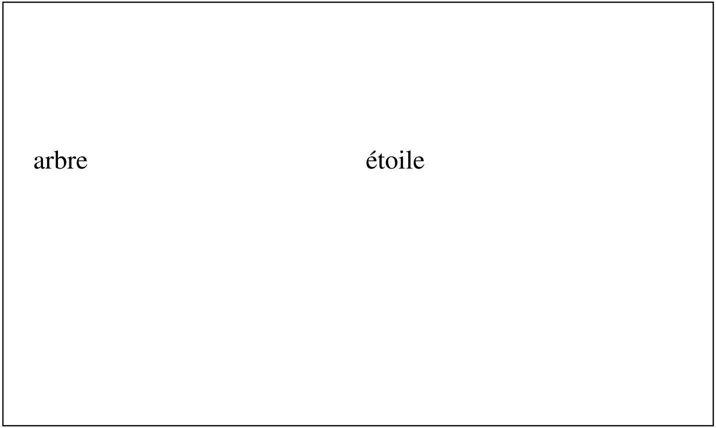
On espère qu'un point vue géométrique permettra d'obtenir des résultats de ce type pour une large classe d'espaces.

# Devinette : trouver le point commun

# Devinette : trouver le point commun



# Devinette : trouver le point commun



# Devinette : trouver le point commun

arbre

étoile

boule

# Devinette : trouver le point commun

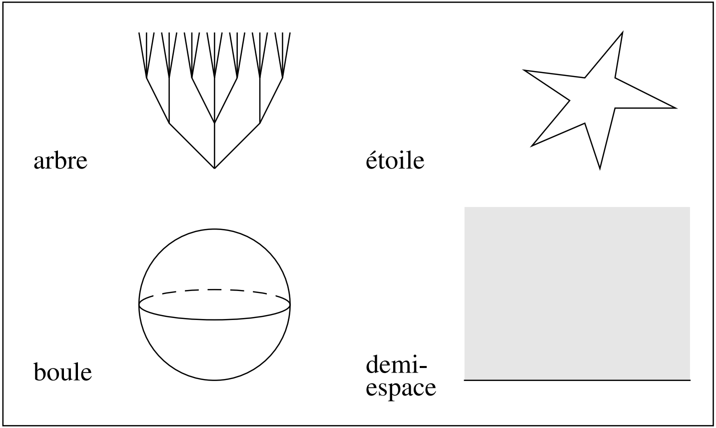
arbre

étoile

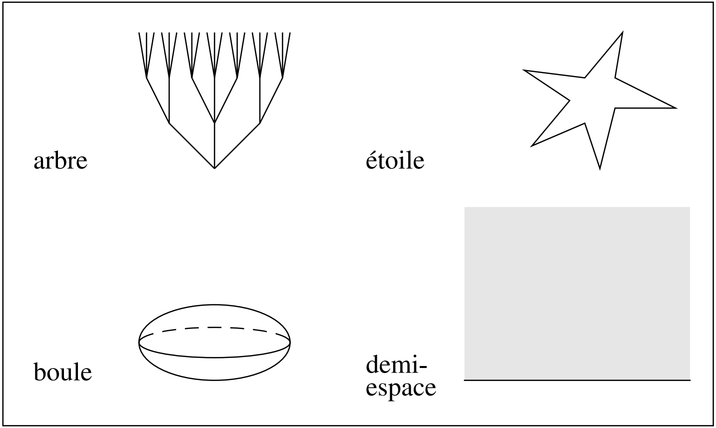
boule

demi-
espace

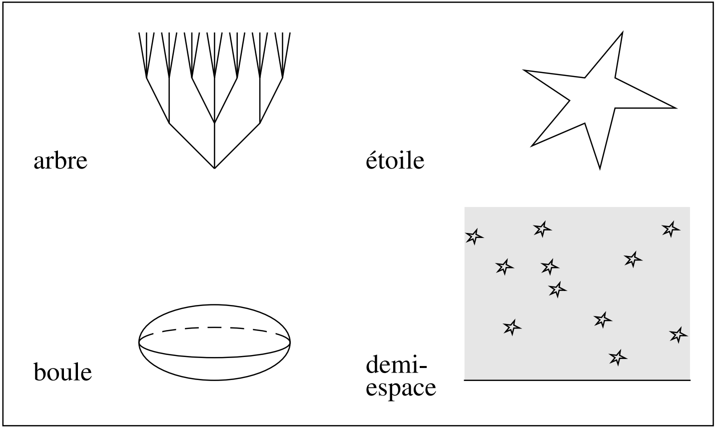
# Devinette : trouver le point commun



# Devinette : trouver le point commun

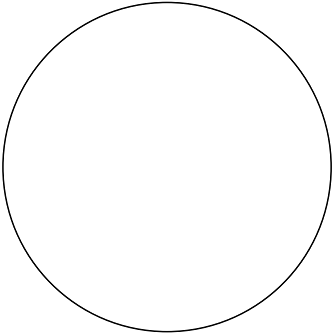


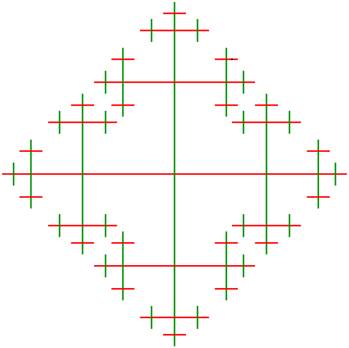
# Devinette : trouver le point commun



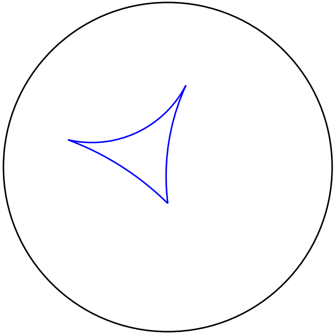
# Hyperbolicité

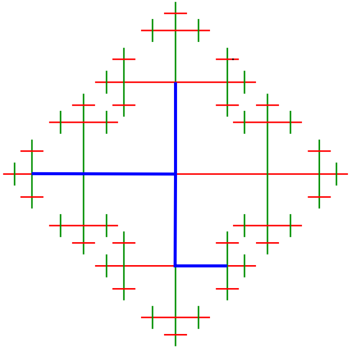
# Hyperbolicité



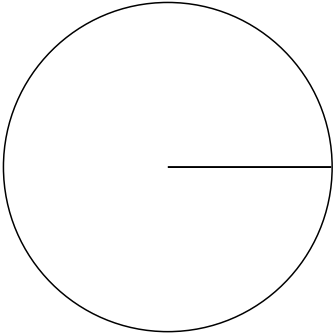


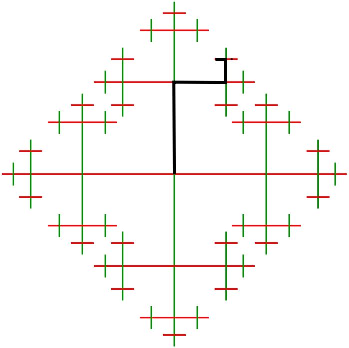
# Hyperbolicité



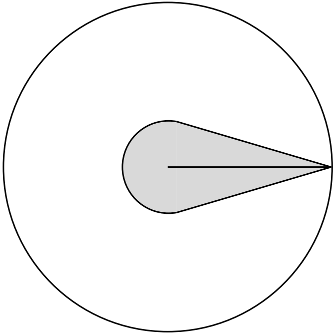


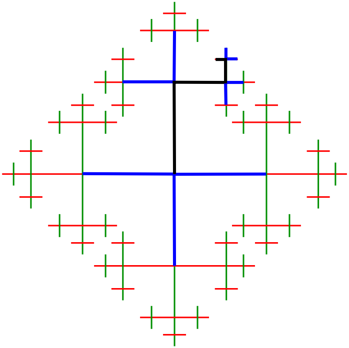
# Hyperbolicité





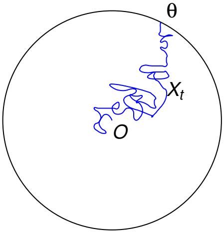
# Hyperbolicité

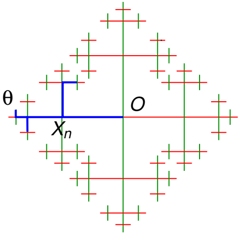




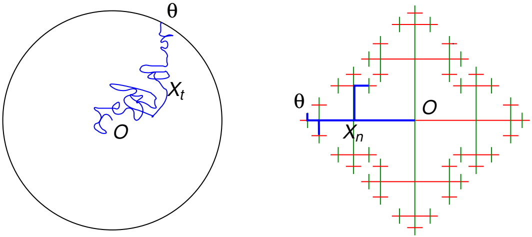
# Méthodes flexibles pour objets rigides

# Méthodes flexibles pour objets rigides



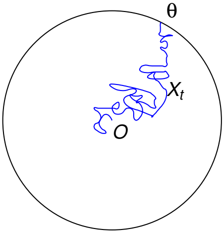



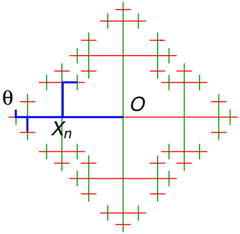
# Méthodes flexibles pour objets rigides




- Analyse-Probabilités : $(u(X_t))$ est une martingale

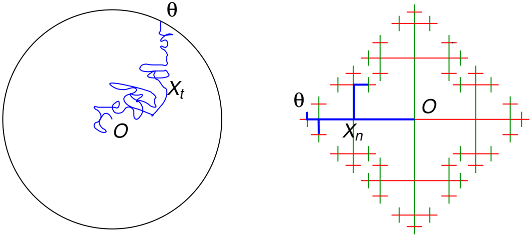
# Méthodes flexibles pour objets rigides



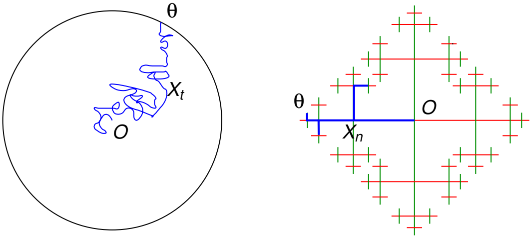

- Analyse-Probabilités : $(u(X_t))$ est une martingale
- Dém. probabiliste de Calderón-Stein par J. Brossard

# Méthodes flexibles pour objets rigides




- Analyse-Probabilités : $(u(X_t))$ est une martingale
- Dém. probabiliste de Calderón-Stein par J. Brossard
- Conditionnement et propriétes stochastiques (CV,...)

# Méthodes flexibles pour objets rigides




- Analyse-Probabilités : $(u(X_t))$ est une martingale
- Dém. probabiliste de Calderón-Stein par J. Brossard
- Conditionnement et propriétes stochastiques (CV,...)
- Loi de sortie = mesure harmonique $\mu$

# Stratégie

# Stratégie

Traitement du “stochastique” par les martingales (cas discret délicat).

# Stratégie

Traitement du “stochastique” par les martingales (cas discret délicat).

“Hyperbolicité” $\Longrightarrow$ bord de Martin $=$ bord géométrique.
$\longrightarrow$ comparaison “non-tangentiel” et “stochastique”.

# Stratégie

Traitement du “stochastique” par les martingales (cas discret délicat).

“Hyperbolicité” $\Longrightarrow$ bord de Martin $=$ bord géométrique.
$\longrightarrow$ comparaison “non-tangentiel” et “stochastique”.

Propriétés stochastiques non équivalentes aux propriétés non-tangentielles en général.
$\longrightarrow$ nécessité de passerelles revenant au “non-tangentiel”.

# Résultats

# Résultats

On considère $X$ étant

- soit une variété riemannienne complète simplement connexe de courbure négative pincée,
- soit un arbre vérifiant l'hypothèse d'uniformité

$$\exists \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \sim y, \varepsilon \leq p(x,y) \leq \frac{1}{2} - \eta.$$

# Résultats

On considère $X$ étant

- soit une variété riemannienne complète simplement connexe de courbure négative pincée,
- soit un arbre vérifiant l'hypothèse d'uniformité

$$\exists \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \sim y, \varepsilon \leq p(x,y) \leq \frac{1}{2} - \eta.$$

Pour une fonction harmonique sur $X$, convergence non-tangentielle, bornitude non-tangentielle et finitude de l'énergie non-tangentielle sont trois propriétés $\mu$-presque partout équivalentes.

# Arbres : toutes les notions coïncident

# Arbres : toutes les notions coïncident

Notations : $\mathcal{L} =$ convergence, $\mathcal{N} =$ bornitude, $\mathcal{J} =$ finitude de l'énergie, $^r =$ radial, $^* =$ stochastique.

# Arbres : toutes les notions coïncident

Notations : $\mathcal{L}$ = convergence, $\mathcal{N}$ = bornitude, $\mathcal{J}$ = finitude de l'énergie, $^r$ = radial, $^*$ = stochastique.

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{J}^\star & \tilde{\subset} & \mathcal{L}^\star & \subset & \mathcal{N}^\star \\
\cap & & \cap & & \cap \\
\mathcal{J}^r & & \mathcal{L}^r & \subset & \mathcal{N}^r \\
\cup & & \cup & & \cup \\
\mathcal{J} & & \mathcal{L} & \subset & \mathcal{N}
\end{array}$$

# Arbres : toutes les notions coïncident

Notations : $\mathcal{L}$ = convergence, $\mathcal{N}$ = bornitude, $\mathcal{J}$ = finitude de l'énergie, $^r$ = radial, $^*$ = stochastique.

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{J}^\star & \tilde{\subset} & \mathcal{L}^\star & \subset & \mathcal{N}^\star \\
\cap & & \cap & & \cap \\
\mathcal{J}^r & & \mathcal{L}^r & \subset & \mathcal{N}^r \\
\cup & & \cup & & \cup \\
\mathcal{J} & & \mathcal{L} & \subset & \mathcal{N}
\end{array}$$

$\mathcal{N}^r \tilde{\subset} \mathcal{J}^r$ et $\mathcal{J}^r \tilde{\subset} \mathcal{J}^\star$

# Arbres : toutes les notions coïncident

Notations : $\mathcal{L}$ = convergence, $\mathcal{N}$ = bornitude, $\mathcal{I}$ = finitude de l'énergie, $^r$ = radial, $^*$ = stochastique.

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{I}^\star & \overset{\sim}{\subset} & \mathcal{L}^\star & \subset & \mathcal{N}^\star \\
\cap & & \cap & & \cap \\
\mathcal{I}^r & & \mathcal{L}^r & \subset & \mathcal{N}^r \\
\cup & & \cup & & \cup \\
\mathcal{I} & & \mathcal{L} & \subset & \mathcal{N}
\end{array}$$

$$\mathcal{N}^r \overset{\sim}{\subset} \mathcal{I}^r \text{ et } \mathcal{I}^r \overset{\sim}{\subset} \mathcal{I}^\star \qquad \mathcal{L}^\star \subset \mathcal{L} \text{ et } \mathcal{N} \subset \mathcal{I}$$

# Densité d'énergie

# Densité d'énergie

Soit $u$ une fonction harmonique définie sur un variété $M$ de courbure négative pincée.

# Densité d'énergie

Soit $u$ une fonction harmonique définie sur un variété $M$ de courbure négative pincée.

Alors $u$ converge non-tangentiellement en $\mu$-presque tout point $\theta \in \partial M$ tel que

$$-\frac{1}{2}\int_{\Gamma_c^\theta} \Delta|u|(dx) < +\infty.$$

# Hyperbolic graphs (Camille Petit)

# Hyperbolic graphs (Camille Petit)

**Setting :** A coercive hyperbolic graph $S$ satisfying the (GRBD) assumption ($\exists K \geq 0$ such that every $x \in S$ is at distance at most $K$ from a geodesic ray starting from $o$), equipped with an admissible markovian transition function $p$ such that $p^*$ is submarkovian.

# Hyperbolic graphs (Camille Petit)

**Setting :** A coercive hyperbolic graph $S$ satisfying the (GRBD) assumption ($\exists K \geq 0$ such that every $x \in S$ is at distance at most $K$ from a geodesic ray starting from $o$), equipped with an admissible markovian transition function $p$ such that $p^*$ is submarkovian.

**Theorem 1.**(accepted for publication, Proc. of A.M.S.)
For a harmonic function $u$, the following two properties are equivalent for $\mu$-almost all $\theta \in \partial S$ :

1. the function $u$ converges non-tangentially at $\theta$,
2. the function $u$ is non-tangentially bounded at $\theta$.

# Hyperbolic graphs (Camille Petit)

**Setting :** A coercive hyperbolic graph $S$ satisfying the (GRBD) assumption ($\exists K \geq 0$ such that every $x \in S$ is at distance at most $K$ from a geodesic ray starting from $o$), equipped with an admissible markovian transition function $p$ such that $p^*$ is submarkovian.

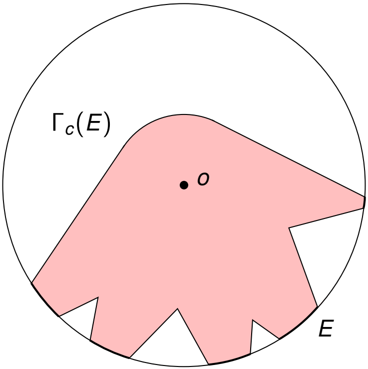
**Theorem 1.**(accepted for publication, Proc. of A.M.S.)
For a harmonic function $u$, the following two properties are equivalent for $\mu$-almost all $\theta \in \partial S$ :

1. the function $u$ converges non-tangentially at $\theta$,
2. the function $u$ is non-tangentially bounded at $\theta$.

**Theorem 2.** $\mu$-almost equivalence with the finiteness of non-tangential energy at $\theta$.

# Transition animalière

# Transition animalière



# Analyse spatiale et statistique des données environnementales, une approche globale des catastrophes naturelles

# Pourquoi ? Comment ?

# Pourquoi ? Comment ?

**Pourquoi :** un besoin d'interaction avec le monde extérieur

# Pourquoi ? Comment ?

**Pourquoi :** un besoin d'interaction avec le monde extérieur

**Comment :**

1. enseignements de statistiques à l'université de Genève,

# Pourquoi ? Comment ?

**Pourquoi :** un besoin d'interaction avec le monde extérieur

**Comment :**

1. enseignements de statistiques à l'université de Genève,
2. certificat de "géomatique environnementale" (géomatique = "approche intégrée de mesure, gestion, stockage, analyse et diffusion de données à référence spatiale"),

# Pourquoi ? Comment ?

**Pourquoi :** un besoin d'interaction avec le monde extérieur

**Comment :**

1. enseignements de statistiques à l'université de Genève,
2. certificat de "géomatique environnementale" (géomatique = "approche intégrée de mesure, gestion, stockage, analyse et diffusion de données à référence spatiale"),
3. stage au GRID/Europe (UNEP)

# Approche globale

# Approche globale

Les progrès récents (satellites, traitement, stockage) ont permis le développement de bases de données *globales* ($=$ mondiales).

# Approche globale

Les progrès récents (satellites, traitement, stockage) ont permis le développement de bases de données *globales* ($=$ mondiales).

Dans une analyse globale, on cherche une couverture des données la plus large possible $\Longrightarrow$

- résolution spatiale ou temporelle assez grossière,
- nombre de variables réduit,
- qualité des données très inégale (couverture, homogénéité, résolution, traitement informatique, accès, métadonnées)

# Attentes et limites

# Attentes et limites

**Méthode :** modèles physiques et statistiques *simples*, *robustes*, *automatisables*.

# Attentes et limites

**Méthode :** modèles physiques et statistiques *simples*, *robustes*, *automatisables*.

**Résultats**

$=$ tendances, influences qualitatives, comparaisons grossières,

$\neq$ prédictions, comparaisons précises, conclusions locales.

# Disaster Risk Index (avec P. Peduzzi...)

# Disaster Risk Index (avec P. Peduzzi...)

En 2000, le Programme des Nations Unies pour le Développement a voulu estimer le niveau de vulnérabilité des populations aux catastrophes naturelles pour mieux cibler ses aides. Il a fait appel au GRID/Europe.

# Disaster Risk Index (avec P. Peduzzi...)

En 2000, le Programme des Nations Unies pour le Développement a voulu estimer le niveau de vulnérabilité des populations aux catastrophes naturelles pour mieux cibler ses aides. Il a fait appel au GRID/Europe.

**Méthodologie :**

1. par type de risque et pays, calcul de l'exposition physique,
2. exp. physique + nb. de décès $\longrightarrow$ vulnérabilité,
3. vulnérabilité en fonction des variables socio-économiques à l'aide d'un modèle statistique.

# Cyclones (avec O. Nordbeck)

Calcul de l'exposition physique au risque cyclonique :

# Cyclones (avec O. Nordbeck)

Calcul de l'exposition physique au risque cyclonique :

1. récupérer et unifier les données physiques (logiciel),
2. déterminer les *zones-tampon* (vents extrêmes),
3. zones-tampon + population $\longrightarrow$ exposition.

# Modèle stationnaire de G.J. Holland

# Modèle stationnaire de G.J. Holland

$$V_h(R) = \sqrt{\frac{b}{\rho} \cdot \left(\frac{R_{max}}{R}\right)^b \cdot (P_{env} - P_{centre}) \cdot e^{\left(\frac{R_{max}}{R}\right)^b} + \frac{R^2 f^2}{4}} - \frac{Rf}{2}$$

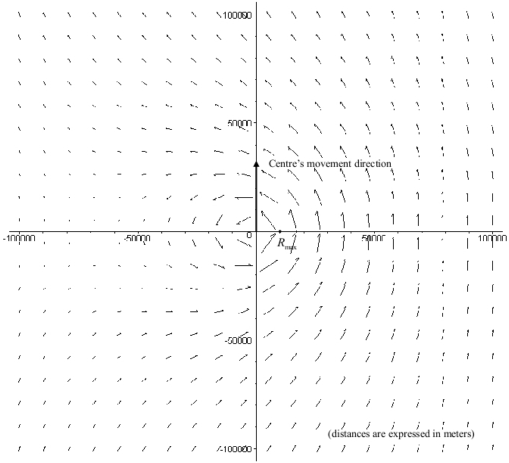
où

- $V_h(R)$ est la vitesse du vent à distance $R$ de l'œil ($ms^{-1}$) ;
- $b$ est un paramètre qui change la forme du profil radial (sans dimension) ;
- $P_{centre}$ est la pression au centre du cyclone (Pa) ;
- $P_{env}$ est la pression asymptotique environnementale (Pa) ;
- $R_{max}$ est la distance de l'œil à laquelle le vent est maximal (m) ;
- $R$ est la distance de l'œil à laquelle on estime le vent (m) ;
- $\rho$ est la densité de l'air, supposée constante (1,15 $kg \cdot m^{-3}$) ;
- $f$ est le paramètre de Coriolis ($= 2\omega \sin(lat)$) avec $\omega = 0.0000729$ $rad \cdot s^{-1}$, la vitesse angulaire de la terre, et *lat* la latitude.

# Champ des vitesses de vent (1)

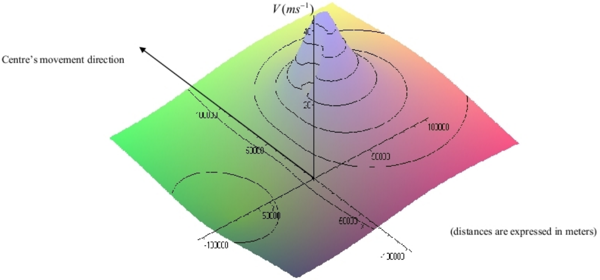
# Champ des vitesses de vent (1)

Wind speed Field



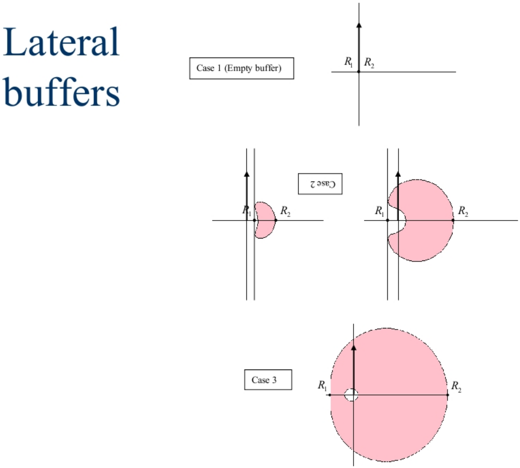
# Champ des vitesses de vent (2)

3-D wind speed intensity with level curves



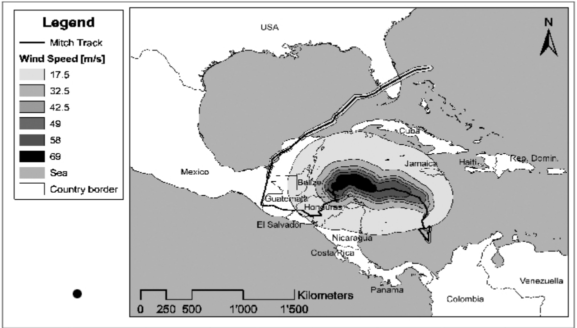
# Zones tampon latérales

# Zones tampon latérales



# Zones tampons de trajectoires

# Zones tampons de trajectoires




| DisNo | Country | DisName | Killed | Injured | Homeless | Affected | TotAff | Damage US$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 19980345 | Honduras | Mitch | 14'600 | 12'000 | | 2'100'000 | 2'112'000 | $2 \times 10^9$ |
| 19980344 | Nicaragua | Mitch | 3'132 | 228 | | 868'000 | 868'228 | $1 \times 10^9$ |
| 19980343 | El Salvador | Mitch | 475 | | | 84'000 | 84'000 | |
| 19980371 | Guatemala | Mitch | 384 | | | 105'700 | 105'700 | |
| 19980375 | Costa Rica | Mitch | 8 | 0 | 1'700 | 15'000 | 16'700 | |
| 19980377 | Belize | Mitch | 0 | | | 60'000 | 60'000 | |
| 19980376 | Panama | Mitch | 0 | | | 7'500 | 7'500 | |

# Inondations (avec C. Herold)

# Inondations (avec C. Herold)

**But :** carte globale d'aléas d'inondations.

# Inondations (avec C. Herold)

**But :** carte globale d'aléas d'inondations.
**Utilité :** *Global Assessment Report* (UNDP, *International Strategy for Disaster Reduction*), suite du *DRI*.

# Inondations (avec C. Herold)

**But :** carte globale d'aléas d'inondations.
**Utilité :** *Global Assessment Report* (UNDP, *International Strategy for Disaster Reduction*), suite du *DRI*.
**Méthodologie :**

- estimer les zones inondées par une crue centenaire, en utilisant le débit centenaire et un MNT

# Inondations (avec C. Herold)

**But :** carte globale d'aléas d'inondations.
**Utilité :** *Global Assessment Report* (UNDP, *International Strategy for Disaster Reduction*), suite du *DRI*.
**Méthodologie :**

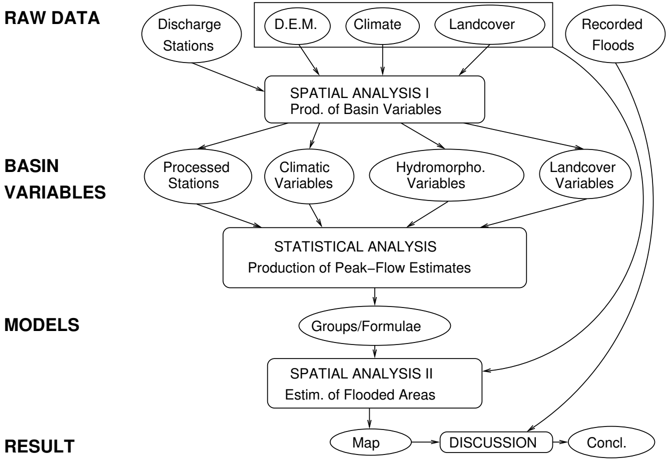
- estimer les zones inondées par une crue centenaire, en utilisant le débit centenaire et un MNT
- bassins avec station de mesure : débits estimés en modélisant la série des débits maximaux annuels

# Inondations (avec C. Herold)

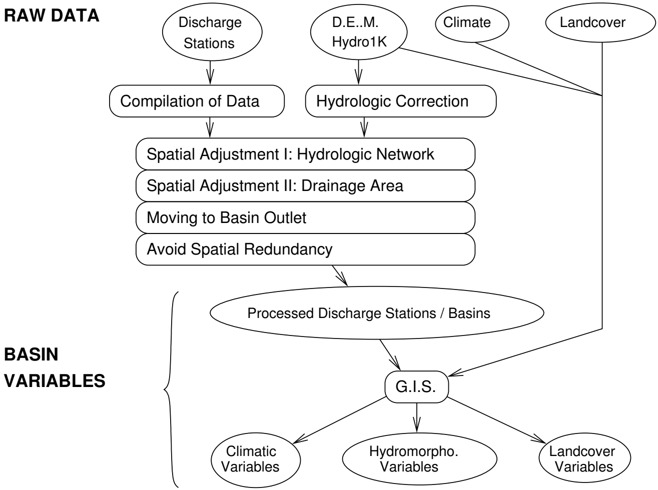
**But :** carte globale d'aléas d'inondations.
**Utilité :** *Global Assessment Report* (UNDP, *International Strategy for Disaster Reduction*), suite du *DRI*.
**Méthodologie :**

- estimer les zones inondées par une crue centenaire, en utilisant le débit centenaire et un MNT
- bassins avec station de mesure : débits estimés en modélisant la série des débits maximaux annuels
- bassins sans station de mesure : débits évalués par des régressions sur les variables climatiques, hydromorphométriques et de couverture du sol

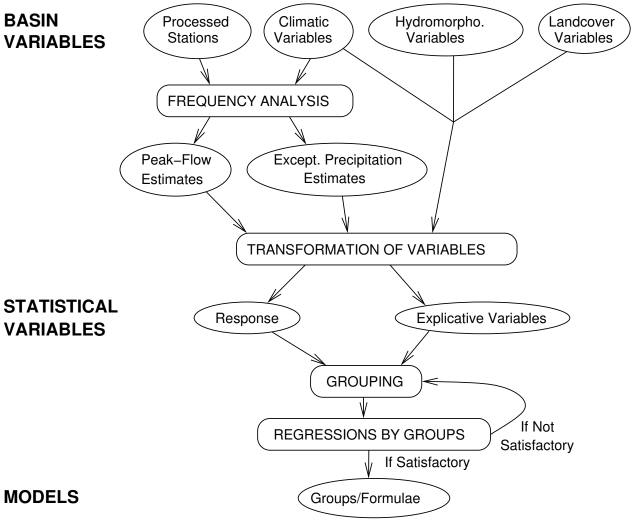
# Organigramme



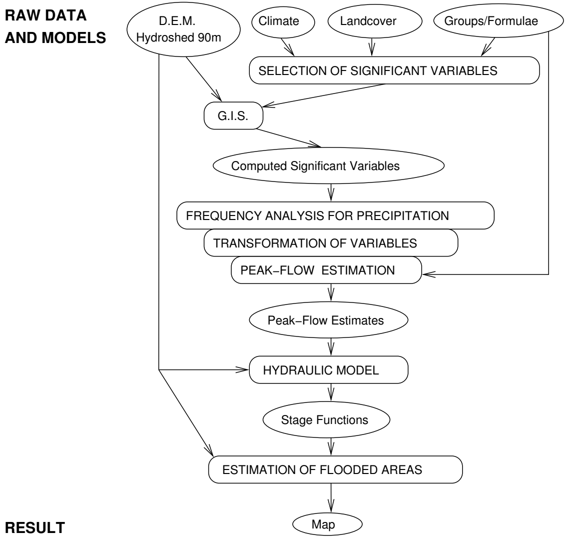
# Première analyse spatiale



# Analyse statistique



# Deuxième analyse spatiale



# Triangulations de polygones presque convexes

(avec R. Bacher)

# Polygones strictement convexes

# Polygones strictement convexes

Le nombre de triangulations d'un polygone strictement convexe est

$$C_{n-2} = \binom{2(n-2)}{n-2} / (n-1).$$

# Polygones strictement convexes

Le nombre de triangulations d'un polygone strictement convexe est

$$C_{n-2} = \binom{2(n-2)}{n-2} / (n-1).$$

On note la fonction génératrice des nombres de Catalans

$$G_C(t) = \sum_{k \geq 0} C_k t^k = \sum_{k \geq 0} \binom{2k}{k} \frac{t^k}{k+1}.$$

# Polygones strictement convexes

Le nombre de triangulations d'un polygone strictement convexe est

$$C_{n-2} = \binom{2(n-2)}{n-2} / (n-1).$$

On note la fonction génératrice des nombres de Catalans

$$G_C(t) = \sum_{k \geq 0} C_k t^k = \sum_{k \geq 0} \binom{2k}{k} \frac{t^k}{k+1}.$$

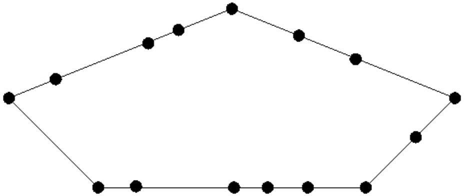
Pour $p(t) = \sum_{k \geq 2} \alpha_k t^k$, on pose

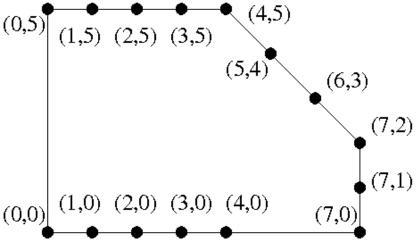
$$\left\langle p(t), t^2 G_C(t) \right\rangle_t = \sum_{k \geq 2} \alpha_k C_{k-2}.$$

# Polygones convexes au sens large

# Polygones convexes au sens large

Deux polygones convexes de poids $1, 5, 2, 3, 4$ :





# Triangulations maximales

# Triangulations maximales

Polynômes maximaux d'arêtes :

$$p_m = \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} (-1)^k \binom{m-k}{k} t^{m-k}.$$

# Triangulations maximales

Polynômes maximaux d'arêtes :

$$p_m = \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} (-1)^k \binom{m-k}{k} t^{m-k}.$$

**Théorème.**

$$\tau_{\max}(a_1, a_2, \ldots, a_l) = \left\langle \prod_{i=1}^{l} p_{a_i}(t), t^2 G_C(t) \right\rangle_t.$$

# Polynôme des triangulations

# Polynôme des triangulations

Polynômes complets d'arêtes :

$$\overline{p}_m = \sum_{k=1}^{m} \binom{m-1}{k-1} p_k(t) s^k.$$

# Polynôme des triangulations

Polynômes complets d'arêtes :

$$\overline{p}_m = \sum_{k=1}^{m} \binom{m-1}{k-1} p_k(t) s^k.$$

**Théorème.** Le polynôme des trangulations est

$$\sum_k \tau_k(a_1, a_2, \ldots, a_l) s^k = \Big\langle \prod_{i=1}^{l} \overline{p}_{a_i}(t), t^2 G_C(t) \Big\rangle_t.$$

# Polynôme des triangulations

Polynômes complets d'arêtes :

$$\overline{p}_m = \sum_{k=1}^{m} \binom{m-1}{k-1} p_k(t) s^k.$$

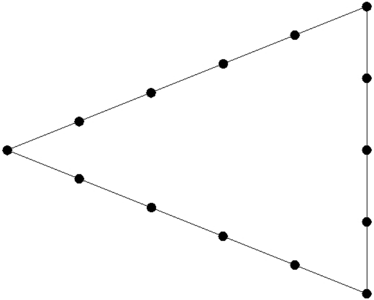
**Théorème.** Le polynôme des trangulations est

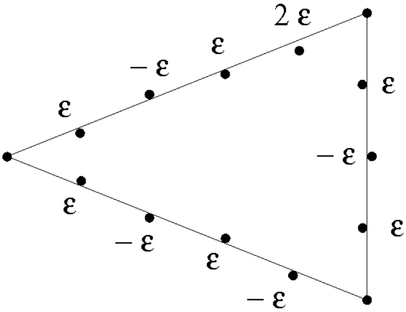
$$\sum_k \tau_k(a_1, a_2, \dots, a_l) s^k = \left\langle \prod_{i=1}^{l} \overline{p}_{a_i}(t), t^2 G_C(t) \right\rangle_t.$$

**Corollaire.** La combinatoire des triangulations de $P(a_1, a_2, \dots, a_l)$ ne dépend pas de l'ordre des poids.

# Polygones presque convexes

# Polygones presque convexes





# Théorème

Il existe des polynômes de presque-arêtes $P_E$ tels que le nombre des triangulations maximales de $P(E_1, \ldots, E_l)$ soit

$$\tau_{\max}(P(E_1, \ldots, E_l)) = \left\langle \prod_{i=1}^{l} p_{E_i}(t), t^2 G_C(t) \right\rangle_t$$

# Théorème

Il existe des polynômes de presque-arêtes $P_E$ tels que le nombre des triangulations maximales de $P(E_1, \ldots, E_l)$ soit

$$\tau_{\max}(P(E_1, \ldots, E_l)) = \left\langle \prod_{i=1}^{l} p_{E_i}(t), t^2 G_C(t) \right\rangle_t$$

et son polynôme des triangulations soit

$$\sum_k \tau_k(P(E_1, \ldots, E_l)) s^k = \left\langle \prod_{i=1}^{l} \overline{p}_{E_i}(t), t^2 G_C(t) \right\rangle_t.$$

# Théorème

Il existe des polynômes de presque-arêtes $P_E$ tels que le nombre des triangulations maximales de $P(E_1, \ldots, E_l)$ soit

$$\tau_{\max}(P(E_1, \ldots, E_l)) = \langle \prod_{i=1}^{l} p_{E_i}(t), t^2 G_C(t) \rangle_t$$

et son polynôme des triangulations soit

$$\sum_k \tau_k(P(E_1, \ldots, E_l)) s^k = \langle \prod_{i=1}^{l} \overline{p}_{E_i}(t), t^2 G_C(t) \rangle_t.$$

**Conséquence :** La combinatoire des triangulations ne dépend pas de l'ordre des presque-arêtes.