Comportement asymptotique des fonctions harmoniques en courbure négative.

Mouton, Frédéric

Commentarii mathematici Helvetici

Volume 70 / 1995 / Article

Nutzungsbedingungen

DigiZeitschriften e.V. gewährt ein nicht exklusives, nicht übertragbares, persönliches und beschränktes Recht auf Nutzung dieses Dokuments. Dieses Dokument ist ausschließlich für den persönlichen, nicht kommerziellen Gebrauch bestimmt. Das Copyright bleibt bei den Herausgebern oder sonstigen Rechteinhabern. Als Nutzer sind Sie sind nicht dazu berechtigt, eine Lizenz zu übertragen, zu transferieren oder an Dritte weiter zu geben.

Die Nutzung stellt keine Übertragung des Eigentumsrechts an diesem Dokument dar und gilt vorbehaltlich der folgenden Einschränkungen: Sie müssen auf sämtlichen Kopien dieses Dokuments alle Urheberrechtshinweise und sonstigen Hinweise auf gesetzlichen Schutz beibehalten; und Sie dürfen dieses Dokument nicht in irgend einer Weise abändern, noch dürfen Sie dieses Dokument für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, aufführen, vertreiben oder anderweitig nutzen; es sei denn, es liegt Ihnen eine schriftliche Genehmigung von DigiZeitschriften e.V. und vom Herausgeber oder sonstigen Rechteinhaber vor.

Mit dem Gebrauch von DigiZeitschriften e.V. und der Verwendung dieses Dokuments erkennen Sie die Nutzungsbedingungen an.

Terms of use

DigiZeitschriften e.V. grants the non-exclusive, non-transferable, personal and restricted right of using this document. This document is intended for the personal, non-commercial use. The copyright belongs to the publisher or to other copyright holders. You do not have the right to transfer a licence or to give it to a third party.

Use does not represent a transfer of the copyright of this document, and the following restrictions apply:

You must abide by all notices of copyright or other legal protection for all copies taken from this document; and You may not change this document in any way, nor may you duplicate, exhibit, display, distribute or use this document for public or commercial reasons unless you have the written permission of DigiZeitschriften e.V. and the publisher or other copyright holders.

By using DigiZeitschriften e.V. and this document you agree to the conditions of use.

Kontakt / Contact

DigiZeitschriften e.V.

Papendiek 14

37073 Goettingen

Email: digizeitschriften@sub.uni-goettingen.de

Comment. Math. Helvetici **70** (1995) 475–505

0010–2571/95/030475–31$1.50 + 0.20/0
© 1995 Birkhäuser Verlag, Basel

Comportement asymptotique des fonctions harmoniques en courbure négative

FRÉDÉRIC MOUTON

Résumé. Soit M une variété riemannienne complète, simplement connexe et de courbure négative pincée. On montre que, pour une fonction harmonique sur M, les notions non-tangentielles de convergence, de bornitude et de finitude de l'énergie sont équivalentes en presque tout point du bord géométrique. Ce résultat est un analogue «géométrique» d'un théorème de A. P. Calderón et E. M. Stein dans le demi-espace euclidien. La démonstration, inspirée de la méthode de J. Brossard dans le cas euclidien, utilise le mouvement brownien.

Abstract. Let M be a complete simply connected Riemannian manifold whose sectional curvatures are bounded between two negative constants. It is shown that, for a given harmonic function on M, non-tangential properties of convergence, boundedness and finiteness of energy are equivalent for almost every point of the geometric boundary. This is a "geometric" analogue of Calderón–Stein theorem in the euclidean half-space. The proof is using Brownian motion, like J. Brossard's one for the euclidean case.

Introduction

L'étude de la convergence non-tangentielle des fonctions harmoniques a commencé au début du siècle avec le célèbre théorème de Fatou ([Fat06]): une fonction harmonique positive sur le disque unité admet en presque tout point du bord une limite non-tangentielle.

Elle s'est poursuivie, dans le disque puis le demi-espace euclidien, par la recherche de critères (presque) ponctuels lorsque les fonctions considérées ne sont plus positives. Nous nous intéressons ici au critère de bornitude non-tangentielle ([Pri16, Cal50b]) et à celui de l'intégrale d'aire ([MZ38, Spe43, Cal50a, Ste61]).

Plus précisément, les résultats de A. P. Calderón (1950) et E. M. Stein (1961) prouvent que, pour une fonction harmonique dans le demi-espace euclidien, la convergence non-tangentielle, la bornitude non-tangentielle et la finitude de l'intégrale d'aire coïncident en presque tout point du bord. Ce résultat a été redémontré ultérieurement à l'aide du mouvement brownien par J. Brossard ([Bro77, Bro78]).

Comme l'avait déjà remarqué A. Korányi, les notions euclidiennes de cône

non-tangentiel:

$$\Gamma_a^\theta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}_+^* \mid |x - \theta| < ay < a\}$$

et d'intégrale d'aire:

$$\int_{\Gamma_0} |\nabla u(x, y)|^2 y^{1-\nu}\, dx\, dy$$

ont une expression plus simple si on munit le demi-espace de la métrique hyperbolique standard. Les cônes non-tangentiels deviennent des voisinages tubulaires de demi-géodésiques et l'intégrale d'aire devient une énergie:

$$\int_{\Gamma_0} |\nabla_{\text{hyp}} u|_{\text{hyp}}^2\, dv_{\text{hyp}}.$$

Le point de vue de la courbure négative semble donc plus naturel pour étudier ces notions, ce que nous nous proposons de voir en démontrant un analogue «géométrique» du théorème de Calderón et Stein, en courbure négative pincée. Remarquons que des résultats existent déjà dans ce sens, notamment un théorème de A. Korányi et R. B. Putz ([KP76]) qui traite le cas des espaces symétriques de rang un. Plus récemment, M. T. Anderson et R. Schoen ont démontré un théorème de Fatou en courbure négative pincée ([AS85]), comme conséquence de l'identification du bord de Martin et du bord géométrique. Il existe par ailleurs quelques résultats dans des cas particuliers d'espaces symétriques de rang supérieur ([MM77, KP81]).

À l'inverse de A. Korányi et R. B. Putz, qui utilisent fortement la structure algébrique du groupe d'isométries, nous utilisons des méthodes browniennes, beaucoup plus souples. Remarquons que ce type de méthodes probabilistes a récemment permis à A. Korányi de démontrer des résultats sur les espaces de Hardy en courbure négative ([Kor91]).

Notre démonstration est inspirée de celle de J. Brossard dans la structure, mais il a fallu remplacer toutes les formules et calculs explicites par des estimées géométriques, ce qui a été possible par des utilisations nombreuses et parfois fines des différents principes de Harnack et des théorèmes géométriques de comparaison.

Il devrait être clair à la lecture de ce qui suit que la souplesse des arguments employés permettra d'adapter la démonstration à des cadres voisins ou moins restrictifs.

En particulier, quitte à remplacer les comparaisons aux modèles de courbure constante, dans un sens par l'utilisation de l'hyperbolicité au sens de Gromov et dans l'autre par une minoration de la courbure de Ricci, on obtiendrait le résultat dans un cadre plus général (qui pourrait englober certains cas discrets). Cette extension pourra faire l'objet d'un travail ultérieur.

D'autre part, l'opérateur laplacien peut être remplacé sans réel changement par un opérateur au comportement suffisament voisin. Nous traitons brièvement à la fin de cet article le cas des opérateurs elliptiques faiblement cœrcifs au sens d'A. Ancona (v. [Anc87]), ce qui permet au passage de retrouver le cas euclidien.

Cet article est organisé de la manière suivante: après une première section fixant cadre et notations, la deuxième rappelle les différentes propriétés de Harnack. La troisième introduit la notion de convergence brownienne. La quatrième rappelle quelques résultats essentiels. Nous énonçons ensuite précisément le théorème dans la cinquième section et le démontrons dans les sixième et septième. Enfin, la dernière section traite le cas d'opérateurs plus généraux.

1. Un cadre géométrique

On se place désormais dans une variété riemannienne M (de classe C^∞ et de dimension $d \geq 2$), complète, simplement connexe et dont la courbure sectionnelle est pincée entre deux constantes négatives: $0 > -a^2 \geq K \geq -b^2$. Remarquons qu'elle est difféomorphe à la boule ouverte B^d d'après le théorème de Cartan–Hadamard.

L'opérateur de Laplace–Beltrami étant donné en fonction de la métrique par la formule

$$\Delta = \left(-\frac{1}{\sqrt{\det g}}\right) \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left((\sqrt{\det g}) g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}\right),$$

une fonction f est harmonique si $\Delta f = 0$.

Pour étudier le comportement asymptotique de ces fonctions, il nous faut choisir un bord, c'est-à-dire une compactification de M.

Les objects géométriques correspondant aux cônes non-tangentiels du demi-espace euclidien sont, on l'a vu plus haut et cela est précisé plus bas, définis à partir de demi-géodésiques. C'est pourquoi le bord adapté aux notions non-tangentielles est le bord géométrique. Il est défini comme l'ensemble des demi-géodésiques quotienté par la relation d'asymptoticité ([EO73]). On obtient une compactification grâce à la topologie des cônes. La courbure étant négative ou nulle, on sait que le bord géométrique de M est homéomorphe à la sphère S^{d-1}.

D'autre part, le bord permettant de «représenter» les fonctions harmoniques positives est le bord de Martin, défini à partir des noyaux de Green ([AS85)]. Le résultat de M. T. Anderson et R. Schoen ([AS85]) affirme que sous les hypothèses précédentes (en particulier le pincement de la courbure), ce bord coïncide avec le précédent. Ce résultat s'étend à des opérateurs plus généraux, comme le montrent les résultats théoriques d'A. Ancona ([Anc87]).

On note alors ∂M cette unique notion de *bord* et $\bar{M} = M \cup \partial M$ la compactification obtenue. Sur ce bord nous avons besoin d'une notion de mesure, puisque les critères que nous recherchons, à l'instar du théorème de Fatou (qui est obtenu dans ce cadre par M. T. Anderson et R. Schoen comme une conséquence de l'identification des bords), ne sont vrais que «presque partout».

Il y a une famille de mesures naturellement associée aux fonctions harmoniques et au mouvement brownien: la famille des mesures harmoniques. La *mesure harmonique partant de* x, μ_x, est définie comme la loi de sortie du mouvement brownien partant de x ([Sul83], v. aussi [Kif86, Led90]), ou par la résolution du problème de Dirichlet ([Sul83, And83]): pour une fonction f continue sur le bord, l'unique prolongement harmonique f est donné par la formule

$$\tilde{f}(x) = \int_{\partial M} f(\theta)\, d\mu_x(\theta).$$

On obtient ainsi une famille de mesures équivalentes $\mu = (\mu_x)_{x \in M}$ qui définit donc une notion de partie *μ-négligeable* du bord (seule notion qui nous intéresse).

S'étant fixé un point base o sur M, on définit le *noyau de Poisson* $p_\theta(x) = d\mu_x/d\mu_o\ (\theta)$, dérivée de Radon–Nykodim des mesures harmoniques. On peut aussi le définir à l'aide des fonctions de Green (v. noyau de Martin dans [AS85, Anc87]).

Suite aux remarques de l'introduction, nous appellerons *tube non-tangentiel* (ou simplement *tube*) *en* θ *de rayon* c l'ensemble

$$\Gamma_c^\theta = \{x \in M \mid d(x, \gamma_0) < c\},$$

où c est un réel strictement positif et γ_θ est l'unique demi-géodésique joignant o à $\theta \in \partial M$. Nous dirons d'une suite (x_n) de points de M qu'elle *tend non-tangentiellement* vers θ si les x_n tendent vers θ en restant dans un certain tube Γ_c^θ.

Nous dirons qu'une fonction u *converge non-tangentiellement* vers l en θ si pour tout $c > 0$, $u(z)$ tend vers l quand z tend vers θ en restant dans Γ_c^θ. Cela équivaut au fait que pour toute suite (x_n) qui tend non-tangentiellement vers θ, la suite $(u(x_n))$ converge vers l.

Nous dirons que la fonction u est *bornée non-tangentiellement* en θ si les restrictions de u aux tubes Γ_c^θ sont bornées.

Nous appellerons *énergie non-tangentielle* de la fonction u sur le tube Γ_c^θ la quantité

$$J_c^\theta(u) = \int_{\Gamma_c^\theta} |\nabla u|^2\, dv_M = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Gamma_c^\theta)},$$

qui correspond à l'intégrale d'aire du cas euclidien.

2. Inégalités de Harnack

On rappelle ici différents critères de comparaison de type «Harnack», qui permettent de contrôler la croissance des fonctions harmoniques positives.

Le premier est l'inégalité de Harnack usuelle, mais dans le cas des boules, ce qui permet d'avoir une constante uniforme. C'est une conséquence de la version infinitésimale de Cheng–Yau ([CY75]) de l'inégalité de Harnack.

PROPOSITION 2.1 (Inégalité de Harnack sur les boules.). *Soient deux rayons r et R vérifiant $0 < r < R$. Il existe alors une constante C, ne dépendant de M que par la dimension et la minoration de la courbure, telle que, pour tout point $x \in M$ et toute fonction harmonique positive u sur $B(x, R)$ on ait*

$$\sup_{z \in \bar{B}(x, r)} u(z) \leq C \cdot \inf_{z \in \bar{B}(x, r)} u(z).$$

Hormis cette inégalité classique nous nous servirons d'une inégalité (ou plutôt d'un principe de comparaison) de Harnack «à l'infini». Pour la décrire, nous avons besoin d'introduire quelques notations.

Si x est un point de M, ξ un vecteur tangent à M au point x et α un angle, on note $\Lambda(x, \xi, \alpha)$ le cône ouvert (usuel) de sommet x, de direction ξ et d'angle α, c'est-à-dire la réunion des demi-géodésiques (ouvertes) partant de x dans des directions faisant un angle avec ξ inférieur strictement à α. On note $\bar{\Lambda}(x, \xi, \alpha)$ le cône fermé correspondant. Enfin, on note $T(x, \xi, \alpha) = \bar{\Lambda}(x, \xi, \alpha) \setminus B(x, 1)$ le cône (fermé) tronqué de sommet x, direction ξ et angle α.

THÉORÈME 2.1 (Principe de Harnack à l'infini.). *Soit un angle $\alpha \in]0, \pi/2[$. Il existe alors une constante C, ne dépendant de M que par la dimension et les bornes de la courbure, telle que, pour tout point $x \in M$ et toute direction ξ en x, on ait la propriété suivante*:

Si u et v sont deux fonctions harmoniques positives (strictement) sur $\Lambda(x, \xi, \alpha)$ tendant vers 0 à l'infini (pour la topologie de $\bar{M}$), alors

$$\sup_{z \in T} \frac{u(z)}{v(z)} \leq C \cdot \inf_{z \in T} \frac{u(z)}{v(z)},$$

où $T = T(x, \xi, \alpha/2)$.

Ce principe est l'étape clé de la démonstration de l'identification du bord géométrique et du bord de Martin ([AS85, Anc87]).

En vue d'étudier le comportement asymptotique des fonctions de Green, nous aurons besoin d'une autre formulation du principe de Harnack à l'infini, due à A. Ancona ([Anc87]). qui est une sorte d'inégalité triangulaire.

THÉORÈME 2.2 (Sous-multiplicativité des fonctions de Green.). *Pour tout angle* $\alpha \in]0, \pi/2[$, *il existe une constante* C *telle que, quels que soient les points* x, y *et* z *tels qu'on puisse trouver une direction* ξ *vérifiant* $x \notin \Lambda(z, \xi, \alpha)$ *et* $y \in T(z, \xi, \alpha/2)$, *on ait* ($G$ *étant le noyau de Green de* M)

$$G(x, y) \leq C \cdot G(x, z)G(z, y).$$

En outre, la constante C *ne dépend de la variété* M *que par les bornes de la courbure et la dimension.*

Remarque. Le rayon utilisé pour tronquer les cônes, qu'on a pris égal à 1, est bien entendu arbitraire et les deux théorèmes précédents sont vrais avec un rayon plus petit (on peut par exemple se ramener au cas de rayon 1 en multipliant la métrique par une constante).

3. Le conditionnement et la convergence brownienne

On explique ici comment conditionner le mouvement brownien à sortir en un point donné du bord. Cela permet de définir les notions de convergence et de bornitude browniennes et de finitude d l'énergie brownienne. Le théorème de convergence des martingales permet alors de prouver que ces trois notions coïncident.

3.1 *Rappels*

Rappelons qu'on peut définir un *mouvement brownien* sur les variétés riemanniennes, comme processus de diffusion associé à l'opérateur de Laplace–Beltrami ([McK69], v. aussi [Pin78]). Lorsque M est complète, simplement connexe, de courbure négative pincée, le mouvement brownien est défini sur $\mathbb{R}_+$ entier (v. par exemple [Kif86]), on dit qu'il n'y a pas d'«explosion». Sous les mêmes hypothèses, un résultat fondamental de J.-J. Prat ([Pra75]) assure que les trajectoires browniennes convergent presque sûrement vers des points du bord ∂M.

Précisons un peu les notations. Le mouvement brownien étant défini pour tout temps t, on le note $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$. Les X_t sont des variables aléatoires sur un espace

probabilisé Ω, à valeurs dans la variété M, et si l'on fixe un évènement élémentaire $\omega \in \Omega$, les applications $[t \mapsto X_t(\omega)]$ sont continues, c'est-à-dire sont des chemins sur M. On peut choisir comme espace probabilisé $\Omega = \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, M)$, l'espace des chemins de M définis sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi $X_t(\omega) = \omega(t)$, et la donnée du mouvement brownien est celle d'une probabilité sur l'espace des chemins. Si on considère le mouvement brownien partant d'un point z fixé, on obtient une probabilité P_z sur Ω (elle ne «voit» que les chemins partant de z). On peut donc voir le mouvement brownien comme la donnée d'une famille de probabilités $(P_z)_{z \in M}$ sur l'espace des chemins. Le résultat de J.-J. Prat est alors le suivant: pour P_z-presque tout chemin ω, il existe un point $\theta \in \partial M$ tel que

$$\lim_{t \to +\infty} \omega(t) \left(= \lim_{t \to +\infty} X_t(\omega) \right) = \theta.$$

Si on note $X_\infty(\omega)$ cette limite, la «loi de sortie» du mouvement brownien partant de z est alors loi image de P_z par la variable X_∞. On sait qu'on retrouve ainsi la mesure harmonique partant de z: pour tout borélien A de ∂M,

$$\mu_z(A) = P_z[\text{“sortir dans A”}] = P_z\{\omega \mid X_\infty(\omega) \in A\}.$$

La propriété fondamentale du mouvement brownien est la *propriété de martingale*: pour une fonction f de classe C^2, l'expression

$$f(X_t) + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta f(X_s)\, ds$$

est une martingale locale (en t) par rapport aux probabilités P_z. Cette propriété est une conséquence de la théorie de l'intégration stochastique et de la formule d'Itô (pour des définitions du cas réel jusqu'à celui des variétés, voir [Dur84, McK69, Pin78]). C'est cette propriété de martingale qui permet l'utilisation des méthodes browniennes en théorie du potentiel. En particulier, si u est une fonction harmonique sur M, alors $(u(X_t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est une martingale locale par rapport aux P_z.

3.2 *Le conditionnement*

Pour conditionner le mouvement brownien à «sortir» de M en un point $\theta \in \partial M$ on utilise le méthode des h-processus de Doob ([Doo57]). Cette dernière s'applique bien car tous les éléments du bord de Martin sont minimaux ([AS85, Anc87]) au sens des fonctions harmoniques.

Soient τ_n le temps de sortie de la boule $B(z, n)$, de centre z et de rayon $n \in \mathbb{N}$, et $\mathcal{F}_{\tau_n}$ la tribu associée. En posant

$$P_z^\theta(A) = \frac{1}{p_\theta(z)} E_z[1_A \cdot p_\theta(X_{\tau_n})],$$

on obtient une probabilité sur $\mathcal{F}_{\tau_n}$. Ces probabilités sont compatibles: si $A \in \mathcal{F}_{\tau_n}$,

$$E_z[1_A \cdot p_\theta(X_{\tau_{n+1}})] = E_z[1_A \cdot E_z[p_\theta(X_{\tau_{n+1}})/\mathcal{F}_{\tau_n}]] = E_z[1_A \cdot p_\theta(X_{\tau_n})].$$

Par le théorème de Kolmogorov sur les limites projectives de probabilités, on obtient une probabilité P_z^θ sur $\mathcal{F}_\infty$, tribu engendrée par les $\mathcal{F}_{\tau_n}$, $n \in \mathbb{N}$, qui coïncide avec les précédentes sur les $\mathcal{F}_{\tau_n}$. Un calcul simple donne, pour F $\mathcal{F}_\infty$-mesurable, la formule de conditionnement suivante:

$$E_z[F] = \int_{\partial M} E_z^\theta[F]\, d\mu_z(\theta).$$

Ces probabilités vérifient la *propriété forte de Markov* (de même que dans [Bro78]): soient T un temps d'arrêt p.s. fini et F une variable aléatoire positive $\mathcal{F}_\infty$-mesurable, alors

$$E_z^\theta[F \circ \Theta_T/\mathcal{F}_T] = u_F(X_T),$$

où $u_F(z') = E_{z'}^\theta[F]$ et $\Theta_T\colon \omega \mapsto \omega(T + \cdot)$ est l'opérateur de translation sur Ω.

Un évènement A de $\mathcal{F}_\infty$ est dit *asymptotique* si $1_A \circ \Theta_{\tau_n} = 1_A$ pour tout n. Pour ces évènements (comme dans [Dur84]), on a une *loi* 0–1: si A est asymptotique, l'application $[z \mapsto P_z^\theta[A]]$ est constante et vaut 0 ou 1. (Le fait que p_θ soit minimal joue ici un rôle.)

Remarquons que P_z^θ-p.s., $X_\infty = \theta$ et aussi que si F est $\mathcal{F}_T$-mesurable pour un temps d'arrête T p.s. fini,

$$E_z^\theta[F] = \frac{1}{p_\theta(z)} E_z[F \cdot p_\theta(X_T)].$$

3.3 *La convergence brownienne*

Soit u une fonction quelconque sur M. Intéressons-nous à son comportement sur les trajectoires browniennes, c'est-à-dire au comportement asymptotique de la

quantité $u(X_t)$. Pour cela, on considère $N^* = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} |u(X_t)|$. On introduit aussi l'*énergie brownienne* de u:

$$J^* = \int_0^{+\infty} |\nabla u(X_t)|^2 \, dt.$$

(Ces deux quantités sont des variables aléatoires sur Ω.)

On définit alors trois évènements de Ω:

$$\mathscr{L}^{**} = \left\{ \omega \in \Omega \;\middle|\; \lim_{t \to +\infty} u(X_t(\omega)) \text{ existe et est finie} \right\},$$

$$\mathscr{N}^{**} = \{\omega \in \Omega \mid N^*(\omega) < +\infty\}; \qquad \mathscr{J}^{**} = \{\omega \in \Omega \mid J^*(\omega) < +\infty\}.$$

Le premier est l'ensemble des trajectoires sur lesquelles la fonction u converge, le second est l'ensemble des trajectoires sur lesquelles la fonction u est bornée et le troisième est l'ensemble des trajectoires sur lesquelles l'énergie de la fonction u est finie.

Ces évènements sont clairement asymptotiques: une «translation» de la trajectoire ne change pas son appartenance à $\mathscr{L}^{**}$, $\mathscr{N}^{**}$, ou $\mathscr{J}^{**}$. En appliquant la loi 0–1 asymptotique, on obtient que les quantités $P_z^\theta(\mathscr{L}^{**})$, $P_z^\theta(\mathscr{N}^{**})$ et $P_z^\theta(\mathscr{J}^{**})$ prennent les valeurs 0 ou 1, cela ne dépendant pas du point z. On peut alors définir $\mathscr{L}^* = \{\theta \in \partial M \mid P_z^\theta(\mathscr{L}^{**}) = 1\}$, et $\mathscr{N}^*$ et $\mathscr{J}^*$ de la même manière. Suivant l'appartenance d'un point θ du bord à ces ensembles, on dira respectivement qu'il y a *convergence brownienne* de u en θ, *bornitude brownienne* de u en θ ou que *l'énergie brownienne* de u est *finie* en θ.

Remarquons que de plus, si $\theta \in \mathscr{L}^*$, $\lim_{t \to +\infty} u(X_t)$ est P_z^θ-p.s. constante, la constante ne dépendant pas de z, car les évènements $\{\omega \mid \lim_{t \to +\infty} u(X_t(\omega)) \leq R\}$ ($R \in \mathbb{R}$) sont asymptotiques. Cette valeur est appelée la *limite brownienne* de la fonction u en θ.

Pour ces notions probabilistes, on montre un résultat similaire au théorème non-tangentiel qu'on veut prouver.

LEMME 3.1 (Analogue probabiliste.) *Si la fonction u est harmonique, on a $\mathscr{L}^* \approx \mathscr{N}^* \approx \mathscr{J}^*$ (i.e. ces ensembles sont égaux μ-p.p.)*

▷ Il suffit d'avoir $\mathscr{L}^{**} \overset{P_z}{\approx} \mathscr{N}^{**} \overset{P_z}{\approx} \mathscr{J}^{**}$, le résultat en découlant en conditionnant.

D'après le théorème de convergence des martingales locales, pour une martingale locale fixée, les deux évènements "la martingale locale est majorée" et "la

martingale locale est convergente" coïncident presque sûrement. (On a évidemment le même résultat avec la minoration.) Ce théoréme, avec la propriété de martingale, assure que $\mathscr{L}^{**} \overset{P_z}{\approx} \mathscr{N}^{**}$.

Pour l'autre égalité, appliquons la propriété de martingale à la fonction u^2. Sachant que la fonction u est harmonique, on a $\Delta u^2 = -2|\nabla u|^2$, et donc l'expression

$$u^2(X_t) - \int_0^t |\nabla u(X_s)|^2 \, ds$$

est une martingale locale différence de deux termes positifs ou nuls. La convergence de l'un ou l'autre de ces termes donne une majoration ou une minoration de la martingale et donc P_z-p.s. la convergence de l'autre terme, ce qui prouve (la fonction $[t \mapsto u(X_t)]$ étant continue) que $\mathscr{L}^{**} \overset{P_z}{\approx} \mathscr{J}^{**}$. □

Il découle de la démonstration du théorème principal 5.1 que, pour une fonction harmonique, ces notions probabilistes sont entraînées (p.p.) par les notions non-tangentielles correspondantes. On peut d'autre part remonter ponctuellement aux propriétés non-tangentielles sous une hypothèse d'uniforme continuité, comme le montre le corollaire 4.5.

4. Trois ingrédients essentiels

On présente ici trois résultats intervenant de manière fondamentale dans la démonstration du théorème principal 5.1.

4.1 *Les fonctions harmoniques bornées*

Lorsque la fonction harmonique considérée est bornée, des résultats précédents ([Sul83, AS85]) assurent qu'elle admet p.p. des limites non-tangentielles et browniennes. Plus précisément, on a le résultat suivant:

THÉORÈME 4.1 (Représentation bornée). *Les fonctions harmoniques bornées u sont représentées de manière unique par les fonctions f de $L^\infty(\mu)$ par la formule*

$$u(x) = \int_{\partial M} f(\theta) \, d\mu_x(\theta) = E_x[f(X_\infty)].$$

De plus, il y a convergence non-tangentielle et convergence brownienne de u en

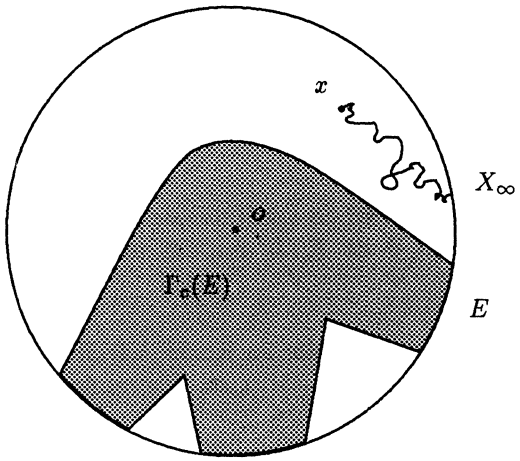

Figure 1. Un lemme clé.

μ-presque tout point $\theta \in \partial M$, et les limites sont données μ-p.p. par les valeurs de la fonction f.

4.2 *Un lemme clé*

Le lemme suivant et ses corollaires interviennent à des points cruciaux de la démonstration. On peut en voir une preuve concise dans le cours d'A. Ancona à Saint-Flour ([Anc90], v. aussi [Mou94]).

Si E est un borélien de ∂M, on note $\Gamma_c(E) = \cup_{\theta \in E} \Gamma_c^\theta$ la réunion des tubes s'appuyant sur E (v. figure 1).

LEMME 4.1. *Il existe une constante $\eta > 0$ telle que, pour tout borélien E de ∂M, on ait*

$$\forall x \notin \Gamma_c(E), \qquad P_x[X_\infty \notin E] \geq \eta.$$

On déduit de ce lemme un corollaire intéressant:

COROLLAIRE 4.1. *Soient E un borélien de ∂M et z un point de M.*

Pour μ-presque tout $\theta \in E$, P_z^θ-p.s., le mouvement brownien «passe les derniers instants de sa vie» dans $\Gamma_c(E)$ (i.e. pour t assez grand, $X_t \in \Gamma_c(E)$).

▷ Soit $f_E(x) = P_x[X_\infty \in E] = E_x[1_E(X_\infty)]$. D'après le théorème 4.1 sur les fonctions harmoniques bornées, pour μ-presque tout θ,

$$P_z^\theta\left[\lim_{t\to+\infty} f_E(X_t) = 1_E(\theta)\right] = 1.$$

Or, d'après le lemme 4.1, il existe un $\eta > 0$ tel que pour $x \notin \Gamma_c(E)$, $f_E(x) \leq 1 - \eta$. Donc pour μ-presque tout θ de E, P_z^θ-p.s., X_t est dans $\Gamma_c(E)$ pour t assez grand. □

On peut déduire un autre corollaire du lemme 4.1. Si on appelle *pointes* d'un tube Γ_e^θ les ensembles $\Gamma_e^\theta \backslash B(o, R)$ $(R \in \mathbb{R}_+)$, on a le résultat suivant:

COROLLAIRE 4.2. *Pour E borélien de ∂M, on note encore $f_E(x) = P_x[X_\infty \in E]$.*

Alors, pout tout $\theta \in \partial M$ tel que $\lim_{\substack{\text{N.T.}\\ x\to\theta}} f_E(x) = 1$, $\Gamma_c(E)$ contient des pointes de tout tube de sommet θ.

Cela est vrai pour μ-presque tout θ de E d'après le théorème 4.1 *sur les fonctions harmoniques bornées.*

▷ Soit θ un point de ∂M tel que $\lim_{\substack{\text{N.T.}\\ x\to\theta}} f_E(x) = 1$. Soit Γ_e^θ un tube de sommet θ. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\Gamma_c(E)$ ne contienne aucune pointe de ce tube. Alors, pour tout $R \in \mathbb{R}_+$, il existe un $x \in \Gamma_e^\theta \backslash \Gamma_c(E)$ tel que $d(o, x) > R$. En prenant $n \in \mathbb{N}$ pour R, on obtient ainsi une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\Gamma_e^\theta \backslash \Gamma_c(E)$ telle que $d(o, x_n) > n$. Le fait que $d(x_n, \gamma_\theta)$ soit bornée par e et que $\lim_{n\to+\infty} d(x_n, o) = +\infty$ implique que (x_n) tend non-tangentiellement vers θ. Donc $\lim_{n\to+\infty} f_E(x_n) = 1$ par hypothèse. Comme d'autre part les x_n ne sont pas dans $\Gamma_c(E)$, en appliquant le lemme 4.1, $f_E(x_n) \leq 1 - \eta$. Cette contradiction achève le démonstration. □

4.3 *Une propriété fondamentale*

La propriété décrite ici a plusieurs corollaires importants pour la suite. Elle figure, en version «théorie du potentiel», dans le cours d'A. Ancona à Saint-Flour ([Anc90], v. [Mou94] pour une autre démonstration).

PROPOSITION 4.1. *Soit une suite de boules fermées de rayon fixé dont les centres tendent non-tangentiellement vers un point θ du bord, et soit $z \in M$ (v. figure* 2).

Alors le mouvement brownien rencontre P_z^θ-p.s. une infinité de ces boules.

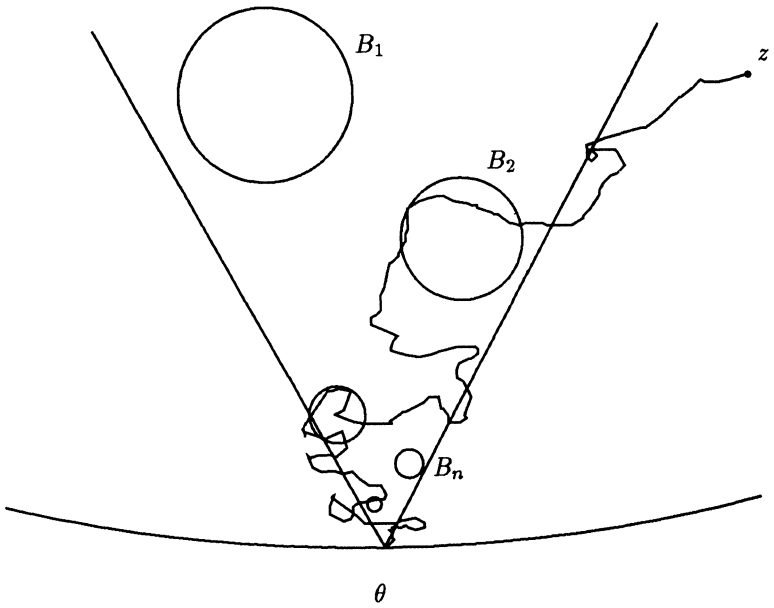

Figure 2. Une propriété fondamentale.

De cette proposition, on déduit trois corollaires très importants.

COROLLAIRE 4.3. *Soit Γ_c^θ un tube non-tangentiel. Alors P_z^θ-p.s., le mouvement brownien rentre et sort de ce tube à des instants arbitrairement proches de $+\infty$.*

▷ Il suffit de prendre deux suites de boules, l'une à l'intérieur du tube et l'autre à l'extérieur, qui tendent toutes les deux non-tangentiellement vers θ, et d'appliquer la proposition. En effet, $(X_t)_{t \leq t_0}$ rencontre seulement un nombre fini de boules, par compacité. □

Le corollaire suivant est très réconfortant pour l'intuition.

COROLLAIRE 4.4. *Si pour une fonction quelconque u, il y a convergence brownienne et convergence non-tangentielle en θ, alors les limites sont les mêmes.*

▷ Cela découle de manière évidente de la proposition. □

Le prochain corollaire permettra de remonter de la convergence brownienne à la convergence non-tangentielle:

COROLLAIRE 4.5. *Si une fonction quelconque u admet une limite brownienne l en θ et est uniformément continue sur le tube Γ_c^θ, alors u(z) converge vers l lorsque z tend vers θ en restant dans Γ_e^θ, cela pour tout sous-tube Γ_e^θ, $e < c$.*

$\triangleright$ Raisonnons par l'absurde. Si la conclusion n'est pas vérifiée, il existe $\varepsilon > 0$ et des points $x_n \in \Gamma_e^\theta$ tendant vers θ tels que $|u(x_n) - l| \geq \varepsilon$. Or u est uniformément continue sur Γ_c^θ, donc

$$\exists \alpha > 0, \qquad \forall x, y \in \Gamma_c^\theta, \qquad d(x, y) \leq \alpha \Rightarrow |u(x) - u(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Quitte à réduire α, on peut supposer que $\alpha \leq c - e$. Les boules $B_n = B(x_n, \alpha)$ sont alors incluses dans Γ_c^θ, par inégalité triangulaire. Comme les x_n tendent non-tangentiellement vers θ, d'après la proposition, P_z^θ-p.s. le mouvement brownien rencontre une infinité de B_n. Soit alors une trajectoire brownienne «générique» $X_t(\omega)$. On a $\lim_{t \to +\infty} u(X_t(\omega)) = l$ et $X_t(\omega)$ rencontre une infinité de B_n. On choisit alors t_0 tel que

$$t \geq t_0 \Rightarrow |u(X_t(\omega)) - l| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

La trajectoire tronquée $(X_t(\omega))_{t \leq t_0}$ rencontre par compacité seulement un nombre fini de B_n, donc $(X_t(\omega))_{t > t_0}$ en rencontre au moins une: B_{n_1}. Soit alors $t_1 > t_0$ tel que $X_{t_1}(\omega) \in B_{n_1}$. On a

$$0 < \varepsilon \leq |u(x_{n_1}) - l| \leq |u(x_{n_1}) - u(X_{t_1}(\omega))| + |u(X_{t_1}(\omega)) - l| \leq \frac{2\varepsilon}{3},$$

ce qui fournit la contradiction recherchée. □

5. Résultat principal

Nous énonçons maintenant de manière précise le résultat que nous voulons démontrer.

THÉORÈME 5.1. *Soit M une variété riemannienne complète, simplement connexe, de courbure négative pincée*: $0 > -a^2 \geq K \geq -b^2$.

Si u est une fonction harmonique sur M alors pour μ-presque tout point θ du bord

∂M, les propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) *Pour tout $c > 0$, la fonction $u(z)$ a une limite lorsque z tend vers θ en restant dans le tube Γ_c^θ;*
(i') *Il existe un $c > 0$ tel que la fonction $u(z)$ ait une limite lorsque z tend vers θ en restant dans le tube Γ_c^θ;*
(ii) *Pour tout $c > 0$, la fonction u est bornée sur le tube Γ_c^θ;*
(ii') *Il existe un $c > 0$ tel que la fonction u soit bornée sur le tube Γ_c^θ;*
(iii) *Pour tout $c > 0$, l'énergie non-tangentielle de u sur le tube Γ_c^θ est finie;*
(iii') *Il existe un $c > 0$ tel que l'énergie non-tangentielle de u sur le tube Γ_c^θ soit finie.*

Introduisons ici quelques notations qui nous serviront par la suite. La fonction u est une fonction harmonique pour laquelle on veut démontrer le théorème. On note $N_c^\theta(u) = \sup_{z \in \Gamma_c^\theta} |u(z)|$. On définit alors, pour $c > 0$, les trois ensembles suivants:

$$\mathscr{L}_c = \left\{ \theta \in \partial M \;\middle|\; \lim_{\substack{z \in \Gamma_c^\theta \\ z \to \theta}} u(z) \text{ existe et est finie} \right\},$$

$$\mathscr{N}_c = \{\theta \in \partial M \mid N_c^\theta(u) < +\infty\}, \qquad \mathscr{J}_c = \{\theta \in \partial M \mid J_c^\theta(y) < +\infty\},$$

qui correspondent aux propriétés primées du théorème. Puis on définit les ensembles $\mathscr{L} = \cap_{c>0} \mathscr{L}_c$, $\mathscr{N} = \cap_{c>0} \mathscr{N}_c$ et $\mathscr{J} = \cap_{c>0} \mathscr{J}_c$, qui correspondent aux propriétés non primées. L'énoncé du théorème se traduit alors par les relations:

$$\mathscr{L} \approx \mathscr{L}_c \approx \mathscr{N} \approx \mathscr{N}_c \approx \mathscr{J} \approx \mathscr{J}_c,$$

où la relation $\approx$ signifie que les deux ensembles diffèrent d'un ensemble μ-négligeable.

On a de manière évidente l'inclusion $\mathscr{L}_c \subset \mathscr{N}_c$. Il sera montré à la section suivante que $\mathscr{N}_c \tilde{\subset} \mathscr{J}_e$ pour tout $e < c$ et à la section d'après que $\mathscr{J}_c \tilde{\subset} \mathscr{L}_e$ pour tout $e < c$. En prenant les intersections (sur un nombre dénombrable d'indices), on obtient $\mathscr{L} \approx \mathscr{N} \approx \mathscr{J}$. Les autres «égalités» sont obtenues par le résultat suivant:

PROPOSITION 5.1. $\mathscr{N}_c \approx \mathscr{N}$.

▷ L'ensemble $\mathscr{N}_c$ est réunion dénombrable des $A_c^n = \{\theta \in \partial M \mid N_c^\theta(u) \leq n\}$. Comme $\mathscr{N} \subset \mathscr{N}_c$, il suffit de montrer que $A_c^n \tilde{\subset} \mathscr{N}$. Par définition de A_c^n, la fonction $|u|$ est bornée par n sur $\Gamma_c(A_c^n)$. En appliquant le corollaire 4.2, on obtient que pour presque tout point θ de A_c^n, $\Gamma_c(A_c^n)$ contient des pointes de tout tube de sommet θ. Sur ces pointes, la fonction u est bornée, et par compacité, elle est donc bornée sur les tubes en entier, ce qui signifie que $\theta \in \mathscr{N}$. □

6. La bornitude n.-t. implique p.p. la finitude de l'énergie n.-t.

Nous montrons ici que $\mathcal{N}_c \tilde{\subset} \mathcal{J}_e$ pout tout $e < c$. Comme dans la proposition précédente, il suffit de prouver que chaque ensemble $A_c^n = \{\theta \in \partial M \mid N_c^\theta(u) \leq n\}$ ($n \in \mathbb{N}$) est presque inclus dans $\mathcal{J}_e$ ($e < c$). Sur $\Gamma = \Gamma_c(A_c^n) = \cup_{\theta \in A_c^n} \Gamma_c^\theta$, la fonction $|u|$ est bornée par n.

On note alors τ le temps de sortie de Γ et τ_m le temps de sortie de la boule $B(o, m)$. Comme la fonction u est harmonique, $\Delta u^2 = -2|\nabla u|^2$ et la propriété de martingale nous dit que

$$M_t = u^2(X_t) - \int_0^t |\nabla u(X_s)|^2 \, ds$$

est une martingale locale. En la considérant au temps d'arrêt $\tau \wedge \tau_m$ (qui est p.s. fini) et en prenant l'espérance partant de o, on obtient

$$E_o[u^2(X_{\tau \wedge \tau_m})] - E_o\left[\int_0^{\tau \wedge \tau_m} |\nabla u(X_s)|^2 \, ds\right] = E_o[M_{\tau \wedge \tau_m}] = E_o[M_0] = u^2(o).$$

Comme u^2 est positive et majorée par n^2 sur Γ, on obtient

$$E_o\left[\int_0^{\tau \wedge \tau_m} |\nabla u(X_s)|^2 \, ds\right] \leq n^2.$$

Faisant tendre m vers $+\infty$ (convergence monotone), puis conditionnant, on obtient, pour μ-presque tout θ,

$$E_o^\theta\left[\int_0^\tau |\nabla u(X_s)|^2 \, ds\right] < +\infty.$$

Pour passer des probabilités à l'analyse, on rappelle un résultat bien connu de théorie du potentiel:

LEMME 6.1. *Soient φ une fonction positive sur un ouvert U de M et z un point de U. On a, en notant τ le temps de sortie de U et $G_U(x, y)$ ($= G(x, y) - E_x[G(X_\tau, y)]$) le noyau de Green de U,*

$$E_z\left[\int_0^\tau \varphi(X_s) \, ds\right] = \int_U \varphi(y) G_U(z, y) \, dy.$$

On en déduit aisément une version conditionnée:

LEMME 6.2. *Soient φ une fonction positive sur un ouvert U de M et z un point de U. On a, en notant τ le temps de sortie de U,*

$$E_z^\theta\left[\int_0^\tau \varphi(X_s)\,ds\right] = \int_U \varphi(y) G_U(z, y) \frac{p_\theta(y)}{p_\theta(z)}\,dy.$$

En appliquant ce résultat à la majoration précédente, on obtient, pour μ-presque tout θ,

$$\int_\Gamma |\nabla u(y)|^2 G_\Gamma(o, y) p_\theta(y)\,dy < +\infty.$$

En vue de se ramener à une énergie, nous allons minorer le terme $G_\Gamma(o, y)p_\theta(y)$. Pour cela on montre d'abord deux lemmes qui ont aussi un intérêt par eux-mêmes. Le premier permet de minorer un terme analogue, mais avec la fonction de Green globale. (Notons que ce résultat a été précédemment remarqué par A. Ancona ([Anc90]).)

LEMME 6.3. *Il existe une constante C ne dépendant que des bornes de la courbure, de la dimension de M et du réel $c > 0$ telle que, pour tout θ, on ait*

$$\forall y \in \Gamma_c^\theta, \qquad G(o, y)p_\theta(y) \geq C > 0.$$

(Si on se limite aux $y \in \Gamma_c^\theta \backslash B(o, c)$, alors on peut trouver une constante indépendante de c.)

▷ Commençons par rappeler que le noyau de Poisson s'écrit aussi comme limite de noyaux de Green normalisés (v. par exemple [AS85]). On a en effet $p_\theta(y) = \lim_{x \to \theta} G(y, x)/G(o, x)$. (Remarquons que la limite est relative à la topologie usuelle de $\bar{M}$, puisque le bord de Martin et le bord géométrique coïncident.) Ainsi on a

$$G(o, y)p_\theta(y) = \lim_{x \to \theta} \frac{G(o, y)G(y, x)}{G(o, x)},$$

ce qui fait immédiatement penser à la propriété d'A. Ancona de sous-multiplicativé des fonctions de Green (théorème 2.2). Pour appliquer cette propriété, on choisit $\pi/4$ (par exemple) comme angle du cône, pour avoir une constante uniforme. Si $y \in \Gamma_c^\theta \backslash B(o, c)$, quitte à prendre x assez proche de θ, on peut trouver un cône vérifiant les hypothèses de la propriété en question, le point à l'extérieur du cône

étant alors o. On obtient ainsi une constante $C > 0$, ne dépendant que des bornes de la courbure et de la dimension, telle que, pour $y \in \Gamma_c^\theta \setminus B(o, c)$ et x assez proche de θ, on ait

$$\frac{G(o, y)G(y, x)}{G(o, x)} \geq C.$$

Par passage à la limite, on obtient le résultat entre parenthèses. Pour avoir le lemme, il suffit alors d'appliquer l'inégalité de Harnack sur les boules ($\bar{B}(o, c)$ et M) à la fonction p_θ et une minoration de la fonction $G(o, \cdot\,)$ ([Anc87]) sur cette même boule. □

Le deuxième lemme permet de comparer la fonction de Green de Γ à la fonction de Green globale:

LEMME 6.4. *Soit U un ouvert de M contenant un cône Γ_c^θ. Si on note τ le temps de sortie de U, on a, pour $e < c$,*

$$\lim_{\substack{x \in \Gamma_e^\theta \\ x \to \theta}} \frac{G_U(o, x)}{G(o, x)} = P_o^\theta[\tau = +\infty].$$

▷ On a

$$G_U(o, x) = G(o, x) - E_o[G(X_\tau, x)] = G(o, x)\left(1 - E_o\left[\frac{G(X_\tau, x)}{G(o, x)}\right]\right)$$
$$= G(o, x)\left(1 - E_o\left[\frac{G(X_\tau, x)}{G(o, x)} 1_{\{\tau < +\infty\}}\right]\right),$$

car la fonction $G(\cdot\,, x)$ est nulle à l'infini.

Cependant, en voyant le noyau de Poisson comme limite de noyaux de Green, comme dans le lemme précédent, on obtient, pour $\tau < +\infty$,

$$\lim_{\substack{x \in \Gamma_e^\theta \\ x \to \theta}} \frac{G(X_\tau, x)}{G(o, x)} = \lim_{x \to \theta} \frac{G(X_\tau, x)}{G(o, x)} = p_\theta(X_\tau).$$

Sous réserve de pouvoir intervertir la limite et l'espérance, on a

$$\lim_{\substack{x \in \Gamma_e^\theta \\ x \to \theta}} E_o\left[\frac{G(X_\tau, x)}{G(o, x)} 1_{\{\tau < +\infty\}}\right] = E_o[p_\theta(X_\tau) 1_{\{\tau < +\infty\}}] = P_o^\theta[\tau < +\infty],$$

donc

$$\lim_{\substack{x \in \Gamma_e^\theta \\ x \to \theta}} \frac{G_U(o, x)}{G(o, x)} = 1 - P_o^\theta[\tau < +\infty] = P_o^\theta[\tau = +\infty],$$

ce qui prouve le lemme.

Il ne reste plus qu'à justifier l'interversion entre la limite et l'espérance, ce qu'on va faire avec le théorème de convergence dominée de Lebesgue. Soit o' le point situé sur la demi-géodésique γ_θ, à distance c du point o. On note γ' la demi-géodésique $(o'\theta)$ et $\Gamma' = \{x \in M \mid d(x, \gamma') < e\}$. Nous allons montrer qu'il existe une constante C telle que

$$\forall x \in \Gamma', \qquad \forall z \notin \Gamma_c^\theta, \qquad \frac{G(z, x)}{G(o, x)} \leq C \cdot p_\theta(z),$$

ce qui fournit la domination voulue.

Si $y \in \gamma'$, les points $z \notin \Gamma_c^\theta$ et o ne sont pas dans $B(y, c)$. D'après l'inégalité de Harnack sur les boules appliquée aux fonctions $G(z, \cdot)$ et $G(o, \cdot)$, il existe une constante C_1 telle que

$$\forall z \notin \Gamma_c^\theta, \qquad \forall y \in \gamma', \qquad \forall x \in \bar{B}(y, e), \qquad \frac{G(z, x)}{G(o, x)} \leq C_1 \frac{G(z, y)}{G(o, y)}.$$

Comme $\Gamma' = \cup_{y \in \gamma'} B(y, e)$, il suffit de montrer qu'il existe une constante C_2 telle que

$$\forall z \notin \Gamma_c^\theta, \qquad \forall y \in \gamma', \qquad \frac{G(z, y)}{G(o, y)} \leq C_2 \cdot p_\theta(z).$$

Pour montrer cela, on va utiliser plusieurs fois la propriété de Harnack à l'infini. Les cônes tronqués seront ici tronqués non pas par des boules de rayon 1, mais par des boules de rayon c, ce qui est possible d'après la remarque située à la fin de la section 2.

On va, dans un premier temps, se ramener au cas où z est proche de la géodésique passant par o et θ, qu'on note $o\theta$. Pour cela, on définit pour chaque $z \notin \Gamma_c^\theta$ un point z' de la manière suivante. Si $d(z, o\theta) \leq c$, on pose $z' = z$. Sinon, on considère le segment réalisant la projection orthogonale de z sur $o\theta$ et on prend pour z' le point de ce segment situé à distance c de la géodésique $o\theta$. Remarquons que ce point z' est encore hors de Γ_c^θ. Dans ce deuxième cas, on note z'' la

projection de z sur la géodésique $o\theta$ et on considère le cône Λ_z de sommet z'', d'angle $\pi/4$, pointant vers z. Comme $\widehat{zz''\theta} = \pi/2$, $\bar{\Lambda}_z$ ne contient pas θ et les fonctions $G(\cdot, y)$ $(y \in \gamma')$ et p_θ vérifient les hypothèses du principe de Harnack à l'infini sur le cône Λ_z. Comme z et z' sont dans le cône tronqué correspondant (rappelons qu'on tronque ici les cônes à distance c), on obtient une constante $C_3(\geq 1)$, indépendante de z et de y, telle que

$$\frac{G(z, y)}{p_\theta(z)} \leq C_3 \cdot \frac{G(z', y)}{p_\theta(z')}.$$

Cette inégalité est encore vérifiée pour les points z et z' du premier cas (puisque $C_3 \geq 1$). Il nous suffit donc de montrer qu'il existe une constante C_4 telle que

$$\forall z' \notin \Gamma_c^\theta \mid d(z', o\theta) \leq c, \qquad \forall y \in \gamma', \qquad \frac{G(z', y)}{G(o, y)} \leq C_4 \cdot p_\theta(z').$$

On sépare alors l'étude en deux cas, suivant que la projection z'' de z sur $o\theta$ est ou n'est pas sur γ_θ.

Si $z'' \notin \gamma_\theta$, alors, pour tout $y \in \gamma'$, on a $d(y, z'') \geq c$. Comme $\widehat{yz''z'} = \pi/2$ et $d(z'', z') \leq c$, par comparaison avec M_a espace modèle de courbure constante $-a^2$ ([Mou94]), on trouve un angle $\beta < \pi/4$ (ne dépendant que de c et a) tel que $\widehat{oyz'} = \widehat{z''yz'} \leq \beta$. En considérant alors le cône de sommet y, d'angle 2β, pointant vers o et les fonctions $G(\cdot, y)$ et p_θ aux points z' et o, le principe de Harnack à l'infini fournit alors une constante C_5, indépendante de z' et y, telle que

$$\frac{G(z', y)}{p_\theta(z')} \leq C_5 \frac{G(o, y)}{p_\theta(o)}, \qquad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{G(z', y)}{G(o, y)} \leq C_5 \cdot p_\theta(z').$$

Soit maintenant z' tel que $z'' \in \gamma_\theta$ (on a alors $d(z', o\theta) = c$). Dans le cas où $\widehat{oyz'} \leq \beta$, le raisonnement et le majoration précédents sont encore valables. Il reste donc à traiter le cas où $\widehat{oyz'} > \beta$. Remarquons d'abord qu'il existe deux constantes C_6 et C_7 (ne dépendant que de c et des bornes de la courbure), l'une par un résultat d'A. Ancona ([Anc87]) car $d(z', y) \geq c$ et l'autre par le lemme 6.3, telles que $G(z', y) \leq C_6$ et $G(o, y)p_\theta(y) \geq C_7$. Ainsi

$$\frac{G(z', y)}{G(o, y)} \leq C_8 \cdot p_\theta(y)$$

et il suffit de majorer $p_\theta(y)/p_\theta(z')$. Séparons encore l'étude en deux cas.

Supposons d'abord que $y \in (z''o)$. Par comparaison avec l'espace modèle M_b ([Mou94]), on obtient un angle $\alpha \in]0, \pi/2[$ (ne dépendant que de c et de b), tel que $\widehat{yz'\theta} > \alpha$. Le cône de sommet z', d'angle α et pointant vers y ne contient pas θ dans son adhérence et le cône tronqué «correspondant» contient y. La propriété de sous-multiplicativité des fonctions de Green (théorème 2.2) donne, pour y' assez proche de θ,

$$G(y', y) \leq C_9 \cdot G(y', z')G(z', y).$$

Or

$$\frac{p_\theta(y)}{p_\theta(z')} = \lim_{y' \to \theta} \frac{G(y', y)}{G(y', z')},$$

donc

$$\frac{p_\theta(y)}{p_\theta(z')} \leq C_9 \cdot C_6.$$

Il reste alors à traiter le cas où $\widehat{oyz'} > \beta$ et $y \notin (z''o)$. Nous montrons alors que la distance $d(z', y)$ est majorée. En comparant le triangle $z'z''y$ au triangle de M_a ayant deux côtés de longueurs c et $d(z'', y)$ faisant un angle droit, on obtient $\widehat{z''yz'} \leq \beta_a$, où β_a est l'angle correspondant du triangle modèle ([Mou94]). Comme $\widehat{z''yz'} = \widehat{oyz'} > \beta$, on a $\beta_a \geq \beta$. Par une variation de triangles en courbure constante, on obtient alors $d(z'', y) \leq l_a$, où l_a est telle que le triangle de M_a ayant deux côtés orthogonaux de longueurs c et l_a ait β comme angle opposé au côté de longueur c. La longueur l_a ne dépend que de c et de la borne supérieure de la courbure.

On compare alors le triangle $z'z''y$ au triangle du modèle M_b ayant deux côtés orthogonaux de longueurs c et $d(z'', y)$. On a $d(z', y) \leq h_b$, où h_b est la longueur correspondante, c'est-à-dire l'hypothénuse. Cette longueur h_b est elle-même inférieure ou égale à l'hypothénuse h'_b d'un triangle rectangle de M_b de côtés c et l_a (car $d(z'', y) \leq l_a$). On a donc $d(z', y) \leq h'_b$, où la longueur h'_b ne dépend que de c et des bornes de la courbure. Cette majoration de $d(z', y)$ permet de trouver, d'après l'inégalité de Harnack sur les boules, une constante C_{10} telle que $p_\theta(y) \leq C_{10} \cdot p_\theta(z')$.

Regroupons maintenant les deux cas: on a montré, pour $\widehat{oyz'} > \beta$, l'existence de deux constantes C_8 et C_{11}, telles que

$$\frac{G(z', y)}{G(o, y)} \leq C_8 \cdot p_\theta(y) \quad \text{et} \quad p_\theta(y) \leq C_{11} \cdot p_\theta(z').$$

En combinant ces deux inégalités, on achève la preuve de la domination et par là celle du lemme. □

Revenons à notre ensembles Γ dont τ est maintenant le temps de sortie. Pour obtenir notre minoration, nous allons montrer que, pour presque tout $\theta \in A_c^n$, $P_o^\theta[\tau = +\infty] > 0$. Pour cela, θ étant fixé, on considère la fonction h définie par $h(z) = p_\theta(z) \cdot P_z^\theta[\tau = +\infty]$. Cette fonction est harmonique sur Γ et elle est positive ou nulle. D'après le principe du maximum, elle est soit identiquement nulle, soit strictement positive en tout point.

D'autre part, d'aprés le corollaire 4.1 du lemme clé, on sait que, pour presque tout $\theta \in A_c^n$, le mouvement brownien passe P_o^θ-presque sûrement les derniers instants de sa vie dans Γ. Si on fixe un tel point θ, alors

$$1 = P_o^\theta[\text{“}X_t \text{ finit sa vie dans } \Gamma\text{”}] = \lim_{m \to +\infty} P_o^\theta[\text{“}X_t \text{ reste dans } \Gamma \text{ après } \tau_m\text{”}],$$

où τ_m désigne encore le temps de sortie de $B(o, m)$. On choisit alors m assez grand pour que

$$P_o^\theta[\text{“}X_t \text{ reste dans } \Gamma \text{ après } \tau_m\text{”}] > 0.$$

D'après la propriété forte de Markov,

$$P_o^\theta[\text{“}X_t \text{ reste dans } \Gamma \text{ après } \tau_m\text{”} \mid \tau_m] = \varphi(X_{\tau_m}),$$

où $\varphi(z) = P_z^\theta[\text{“}X_t \text{ reste dans } \Gamma\text{”}]$. On a donc $\varphi(z) = P_z^\theta[\tau = +\infty]$ si $z \in \Gamma$ et $\varphi(z) = 0$ sinon. En prenant les espérances, on a

$$P_o^\theta[\text{“}X_t \text{ reste dans } \Gamma \text{ après } \tau_m\text{”}] = E_o^\theta[\varphi(X_{\tau_m})],$$

donc $E_o^\theta[\varphi(X_{\tau_m})] > 0$, ce qui prouve que φ n'est pas identiquement nulle. Donc la fonction h ne l'est pas non plus et elle est strictement positive. On a donc $P_o^\theta[\tau = +\infty] > 0$.

On a donc montré que, pour presque tout $\theta \in A_c^n$, $P_o^\theta[\tau = +\infty] > 0$, ce qui implique par le lemme précédent que, pour un tel θ et $e < c$,

$$\lim_{\substack{y \in \Gamma_e^\theta \\ y \to \theta}} \frac{G_\Gamma(o, y)}{G(o, y)} > 0.$$

Soit un tel θ et soit $e < c$. Il existe une constante $C_1 > 0$ et R assez grand tels que

$$\forall y \in \Gamma_e^\theta \setminus B(o, R), \qquad G_\Gamma(o, y) \geq C_1 \cdot G(o, y).$$

En appliquant alors le lemme 6.3, on a

$$\forall y \in \Gamma_e^\theta \setminus B(o, R), \qquad G_\Gamma(o, y) p_\theta(y) \geq C_2 > 0.$$

En reportant cela dans les résultats trouvés précédemment, on obtient

$$+\infty > \int_\Gamma |\nabla u(y)|^2 G_\Gamma(o, y) p_\theta(y)\, dy \geq \int_{\Gamma_e^\theta \setminus B(o, R)} |\nabla u(y)|^2 G_\Gamma(o, y) p_\theta(y)\, dy$$

$$\geq C_2 \int_{\Gamma_e^\theta \setminus B(o, R)} |\nabla u(y)|^2\, dy.$$

L'autre partie du tube, $\Gamma_e^\theta \cap B(o, R)$, étant relativement compacte dans M, on en déduit que l'énergie non-tangentielle, $J_e^\theta(u)$ est finie.

Ainsi pour presque tout $\theta \in A_c^n$ et pour tout $e < c$, on a $\theta \in \mathcal{J}_e$, ce qu'il fallait démontrer.

7. La finitude de l'énergie n.-t. implique p.p. la convergence n.-t.

Nous montrons ici $\mathcal{J}_c \doteq \mathcal{L}_e$ pour tout $e < c$. Cela en deux étapes: dans un premier temps, nous montrons que $\mathcal{J}_c \doteq \mathcal{L}^*$ (ensemble des points de convergence brownienne de u). Ensuite nous montrons que si l'énergie non-tangentielle $J_c^\theta(u)$ est finie, alors la fonction $|\nabla u|$ est bornée sur tout sous-tube Γ_e^θ, $e < c$. La fonction u étant alors uniformément continue sur ces tubes, il suffit d'appliquer le corollaire 4.5 de la propriété fondamentale pour conclure (quitte à prendre un sous-tube «intermédiaire»).

7.1 *Une énergie n.-t. finie implique p.p. la convergence brownienne*

Pour montrer que $\mathcal{J}_c \doteq \mathcal{L}^*$, comme $\mathcal{L}^* \approx \mathcal{J}^*$ d'après l'analogue probabiliste (lemme 3.1), il suffit de montrer le résultat suivant:

PROPOSITION 7.1. $\mathcal{J}_c \doteq \mathcal{J}^*$.

Comme précédemment, il suffit de montrer que les $F_c^n = \{\theta \in \partial M \mid J_c^\theta(u) \leq n\}$ ($n \in \mathbb{N}$) sont presque inclus dans $\mathcal{J}^*$. On fixe alors un n et on note $v(z) = \mu_z(F_c^n) \doteq P_z[X_\infty \in F_c^n]$ le prolongement harmonique de $1_{F_c^n}$.

L'idée de la démonstration, comme dans celle de J. Brossard ([Bro77]), est de s'intéresser, pour $\alpha \in]0, 1[$, à la quantité

$$I_\alpha = E_o\left[\int_0^{+\infty} |\nabla u(X_t)|^2 1_{\{v \geq \alpha\}}(X_t)\, dt\right].$$

On a en effet le résultat suivant:

LEMME 7.1. *S'il existe un* $\alpha \in]0, 1[$ *tel que* $I_\alpha < +\infty$, *alors* $F_c^n \tilde{\subset} \mathcal{J}^*$.

▷ Si $I_\alpha < +\infty$, on obtient alors par conditionnement que pour presque tout θ, P_o^θ-p.s.,

$$\int_0^{+\infty} |\nabla u(X_t)|^2 1_{\{v \geq \alpha\}}(X_t)\, dt < +\infty.$$

D'autre part, pour presque tout $\theta \in F_c^n$, P_o^θ-p.s., $\lim_{t \to +\infty} v(X_t) = 1$ (par le théorème 4.1., v étant une fonction harmonique bornée), donc $v(X_t) \geq \alpha$ à partir d'un certain rang. Ainsi, pour presque tout $\theta \in F_c^n$, P_o^θ-p.s.,

$$\int_0^{+\infty} |\nabla u(X_t)|^2\, dt < +\infty,$$

ce qui prouve le lemme. □

Il reste donc à montrer qu'on peut trouver $\alpha \in]0, 1[$ tel que $I_\alpha < +\infty$.
En appliquant le lemme 6.1, on obtient

$$I_\alpha = \int_M |\nabla u(y)|^2 1_{\{v \geq \alpha\}}(y) G(o, y)\, dy = \int_{\{v \geq \alpha\}} |\nabla u(y)|^2 G(o, y)\, dy. \tag{1}$$

D'autre part,

$$\int_{F_c^n} J_c^\theta(u)\, d\mu_o(\theta) \leq n \cdot \mu_o(F_c^n) < +\infty.$$

En notant $\Gamma = \Gamma_c(F_c^n)$ et, pour $y \in M$, $H_c(y) = \{\theta \in \partial M \mid y \in \Gamma_c^\theta\}$, on a

$$\begin{aligned}\int_{F_c^n} J_c^\theta(u)\, d\mu_o(\theta) &= \int_{F_c^n} d\mu_0(\theta) \int_{\Gamma_c^\theta} |\nabla u(y)|^2\, dy = \int_\Gamma |\nabla u(y)|^2\, dy \int_{H_c(y) \cap F_c^n} d\mu_o(\theta) \\ &= \int_\Gamma |\nabla u(y)|^2 \mu_o(H_c(y) \cap F_c^n)\, dy. \end{aligned} \tag{2}$$

L'idée est maintenant de relier les deux expressions (1) et (2). Pour cela, on va commencer par montrer qu'on peut choisir α tel que $\{v \geq \alpha\} \subset \Gamma$, puis on montrera que sur un ensemble $\{v \geq \alpha\} \backslash B(o, c')$, on a une inégalité du type $G(o, y) \leq C \cdot \mu_o(H_c(y) \cap F_c^n)$, ce qui permettra de conclure.

En appliquant le lemme clé 4.1 à l'ensemble $(H_c(y))^c \subset \partial M$, on obtient une constante $\eta > 0$ ne dépendant ni de c, ni de y, telle que

$$\forall x \notin \Gamma_c((H_c(y))^c), \qquad P_x[X_\infty \notin (H_c(y))^c] \geq \eta.$$

La mesure harmonique étant le loi de sortie du mouvement brownien, en appliquant cette minoration au point $x = y$ qui, par définition, n'est pas dans $\Gamma_c((H_c(y))^c)$, on obtient $\mu_y(H_c(y)) \geq \eta$.

On choisit alors $\alpha > 1 - \eta$. Si $y \notin \Gamma$, alors $H_c(y) \cap F_c^n = \phi$, donc

$$v(y) = \mu_y(F_c^n) \leq 1 - \mu_y(H_c(y)) \leq 1 - \eta < \alpha.$$

On a donc $\{v \geq \alpha\} \subset \Gamma$.

Montrons alors l'inégalité qui va permettre de conclure:

LEMME 7.2. *Il existe une constante C telle que, en notant $c' = \sup\{c, 1\}$,*

$$\forall y \in \{v \geq \alpha\} \backslash B(o, c'), \qquad \frac{\mu_o(H_c(y) \cap F_c^n)}{G(o, y)} \geq C > 0.$$

$\triangleright$ Soit $y \in \{v \geq \alpha\} \backslash B(o, c')$. Pour $\theta \in H_c(y)$, on a $y \in \Gamma_c^\theta \backslash B(o, c)$ (car $c \leq c'$), donc l'angle $\widehat{yo\theta}$ est aigu. En comparant le triangle $oy\theta$ à un triangle de M_b (modèle de courbure constante $-b^2$) de côtés $d(y, o)$ et $+\infty$ et dont le sommet commun a une hauteur égale à la distance entre y et $o\theta$ ([Mou94]), puis ce dernier à un triangle rectangle idéal de M_b de côté c, on montre qu'il existe $\beta > 0$ (ne dépendant que de c et de la borne inférieure de la courbure) tel que $\widehat{oy\theta} > \beta$. On fait alors correspondre à y le point y_1 situé sur le segment géodésique (yo) à distance 1 de y. Par application du principe de Harnack à l'infini (théorème 2.1) sur le cône de sommet y, d'«axe» yo (orienté vers o) et d'angle β (v. figure 3), on obtient une constante C_1 indépendante de y telle qu'en appliquant ce principe aux fonctions $[x \mapsto \mu_x(H_c(y) \cap F_c^n)]$ et $[x \mapsto G(x, y)]$ entre les points o et y_1, on ait

$$\frac{\mu_o(H_c(y) \cap F_c^n)}{G(o, y)} \geq C_1 \frac{\mu_{y_1}(H_c(y) \cap F_c^n)}{G(y_1, y)}.$$

Comme $d(y, y_1) = 1$, il existe une constante C_2 indépendante de y telle que $G(y, y_1) \leq C_2$ ([Anc87]). Et l'inégalité de Harnack sur les boules donne une

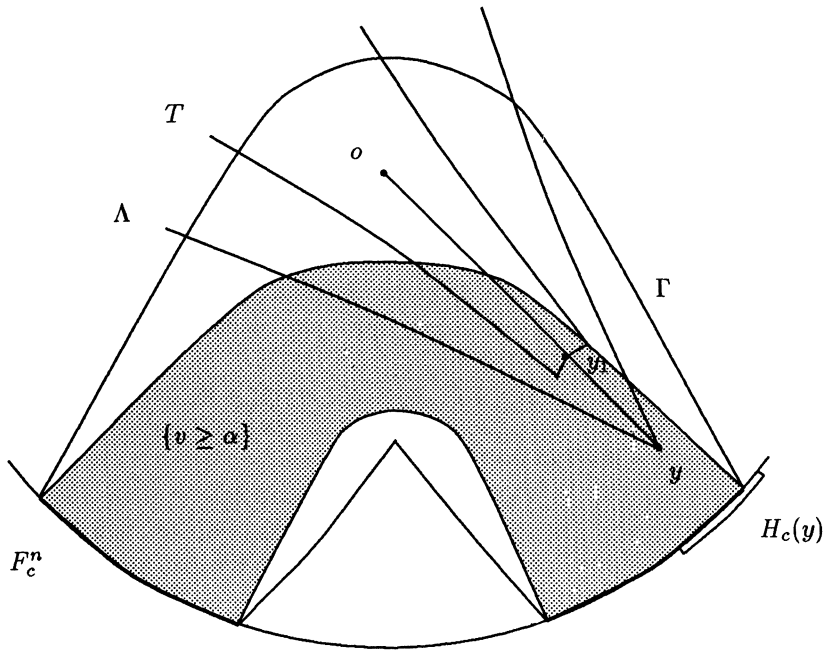

Figure 3. Figure pour le lemme 7.2.

constante C_3 ne dépendant pas de y telle que

$$\mu_{y_1}(H_c(y) \cap F_c^n) \geq C_3 \cdot \mu_y(H_c(y) \cap F_c^n).$$

On obtient donc une constante C_4 indépendante de y telle que

$$\frac{\mu_o(H_c(y) \cap F_c^n)}{G(o, y)} \geq C_4 \cdot \mu_y(H_c(y) \cap F_c^n).$$

Mais on a aussi $v(y) \geq \alpha$. Or

$$v(y) = \mu_y(F_c^n) = \mu_y(F_c^n \cap H_c(y)) + \mu_y(F_c^n \setminus H_c(y)),$$

donc

$$\mu_y(F_c^n \cap H_c(y)) \geq \alpha - \mu_y((H_c(y))^c) \geq \alpha - (1 - \eta) = C_5 > 0,$$

et $C = C_4 \cdot C_5$ est la constante recherchée. □

Nous pouvons maintenant montrer la finitude de I_α. Par la formule (1),

$$I_\alpha = \int_{\{v \geq \alpha\}} |\nabla u(y)|^2 G(o, y)\, dy$$
$$\leq \int_{\{v \geq \alpha\} \setminus B(o, c')} |\nabla u(y)|^2 G(o, y)\, dy + \int_{B(o, c')} |\nabla u(y)|^2 G(o, y)\, dy.$$

La deuxième intégrale est finie car la fonction $|\nabla u|^2$ est bornée sur $B(o, c')$, et la fonction $G(o, \cdot)$ est localement intégrable. La première est finie en appliquant les résultats précédents:

$$\int_{\{v \geq \alpha\} \setminus B(o, c')} |\nabla u(y)|^2 G(o, y)\, dy \leq \frac{1}{C} \int_{\{v \geq \alpha\} \setminus B(o, c')} |\nabla u(y)|^2 \mu_o(H_c(y) \cap F_c^n)\, dy$$
$$\leq \frac{1}{C} \int_\Gamma |\nabla u(y)|^2 \mu_o(H_c(y) \cap F_c^n)\, dy,$$

et on a vu précédemment (formule (2)) que cette dernière intégrale est finie.

On a donc trouvé un α tel que I_α soit finie, ce qui achève la démonstration de la proposition.

7.2 *L'énergie n.-t. contrôle uniformément les variations*

Nous prouvons ici un résultat qui permet de remonter de la convergence brownienne à la convergence non-tangentielle en utilisant le corollaire 4.5, ce qui achève la preuve du théorème 5.1.

PROPOSITION 7.2. *Si u est une fonction harmonique dont l'énergie non-tangentielle $J_c^\theta(u)$ est finie, alors la fonction $|\nabla u|$ est bornée sur tout sous-tube Γ_e^θ, $e < c$.*

La démonstration de cette proposition repose sur le lemme analytique suivant:

LEMME 7.3. *Soit M une variété complète, de courbure sectionnelle bornée et de rayon d'injectivité non nul δ.*

Pour tout réel $\lambda > 0$ et tout reyon $R \in]0, \delta/2[$, il existe une constante C telle que:

Si f est une fonction positive ou nulle, localement bornée et de gradient localement borné, vérifiant $\Delta f \leq \lambda f$ au sens des distributions, alors

$$\forall x \in M, \qquad \|f\|_\infty^{\bar{B}(x, R)} \leq C \|f\|_2^{\bar{B}(x, 2R)}.$$

▷ Ce lemme se démontre par le méthode d'itération de De Giorgi–Nash–Moser ([Mos60]) en utilisant le plongement de Sobolev de $H_1^1(M)$ dans $L^{(d/d-1)}(M)$ ([Mou94]). □

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition.

La variété que nous considérons vérifie bien les hypothèses du lemme. Nous allons l'appliquer à la fonction $f = |\nabla u|$. Elle est bien positive ou nulle, localement bornée et de gradient localement borné. Il reste à montrer qu'elle vérifie une inégalité du type ci-dessus.

D'aprés la formule de Bochner ([GHL87]),

$$g(\Delta\, du, du) = |D\, du|^2 + \frac{1}{2}\,\Delta |du|^2 + \mathrm{Ric}\,(\nabla u, \nabla u).$$

Comme la courbure est minorée, $\mathrm{Ric}\,(\nabla u, \nabla u) \geq -\tilde{C}|\nabla u|^2$, où $\tilde{C} > 0$ (elle vaut $b^2(\dim M - 1)$). Comme u est harmonique, $\Delta\, du = d\,\Delta u = 0$.

En un point non critique ($du \neq 0$), on a

$$\frac{1}{2}\,\Delta |du|^2 = |du|\Delta |du| - |\nabla |du||^2$$

et, d'autre part, la dérivation du produit $du = |du| \cdot (du/|du|)$ donne («un vecteur normé étant orthogonal à sa dérivée»)

$$|Ddu|^2 = |\nabla |du||^2 + |du|^2 \left| D\left(\frac{du}{|du|}\right)\right|^2.$$

En rassemblant tous ces éléments dans la formule de Bochner, on obtient, pour un point non critique,

$$0 \geq |du|^2 \left| D\left(\frac{du}{|du|}\right)\right|^2 + |du|\Delta |du| - \tilde{C}|\nabla u|^2.$$

Comme $|du| = |\nabla u|$, on a, en un point non critique, $\Delta |\nabla u| \leq \tilde{C}|\nabla u|$, c'est-à-dire, en posant $\lambda = \tilde{C}$,

$$\Delta f \leq \lambda f.$$

Aux points critiques, comme f admet un minimum (qui est 0), $\Delta f \leq 0$ au sens des distributions et l'inégalité est encore vérifiée. On peut donc appliquer le lemme analytique à la fonction $f = |\nabla u|$ et au réel λ.

On fixe maintenant $e < c$ et on pose $R = (c-e)/2$. Pour $x \in \Gamma_e^\theta$, par inégalité triangulaire, on a $B(x, 2R) \subset \Gamma_c^\theta$ et donc

$$(\|f\|_2^{B(x,2R)})^2 \leq J_c^\theta(u).$$

Le nombre R étant fixé, on trouve, en appliquant le lemme, une constante $\hat{C}$ indépendante de y telle que

$$\|f\|_\infty^{B(x,R)} \leq \hat{C}\|f\|_2^{B(x,2R)} \leq \hat{C}\sqrt{J_c^\theta(u)}.$$

En particulier, $|\nabla u(x)| \leq \hat{C}\sqrt{J_c^\theta(u)}$, et comme l'énergie $J_c^\theta(u)$ est finie, la fonction $|\nabla u|$ est bornée sur Γ_e^θ, ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. A. Ancona nous a signalé une preuve plus directe de cette dernière proposition dont voici les grandes lignes: «Si on utilise l'inégalité de Poincaré, la théorie de Moser donne une borne uniforme de la variation de u sur toute boule $B(x, R') \subset B(x, R) \subset \Gamma_c^\theta$ et l'uniforme continuité voulue. La borne plus fine sur $|\nabla u|$ résulte d'un théorème de Yau.»

8. Extension aux opérateurs faiblement cœrcifs

La travail précédent, s'il traite le cas du laplacien, objet géométrique naturel, n'utilise cependant pas de propriétés spécifiques à cet opérateur. Une relecture permet d'isoler les propriétés requises pour la démonstration et d'étendre ainsi le résultat à d'autres opérateurs.

Tout d'abord, on a besoin de l'identification du bord de Martin au bord géométrique et des notions naturellement associées: fonction de Green, noyau de Poisson, mesures harmoniques. Tout cela est encore valable dans le cas d'un opérateur elliptique L supposé adapté et faiblement cœrcif au sens d'A. Ancona (v. [Anc87]). Les différentes propriétés de Harnack sont elles aussi valables dans ce cadre puisqu'elles sont à la base du résultat ci-dessus.

La partie probabiliste, quant-à-elle, nécessite un bon comportement à l'infini de la diffusion associée à l'opérateur L. Pour cela, on suppose que les constantes sont harmoniques et que la fonction de Green tend vers zéro à l'infini. Le comportement est alors similaire à celui du mouvement brownien. Quitte à multiplier l'opérateur L par une fonction, on peut de plus supposer que la diffusion est définie sur $\mathbb{R}_+$ entier. Le conditionnement de Doob est applicable car tous les éléments du bord de Martin sont minimaux. Les propriétés de la section 4, basées sur les résultats d'A. Ancona, sont encore valables.

Pour le théorème proprement dit, il faut introduire l'énergie comme $\frac{1}{2}\int L(u^2)$ (avec, cette fois, le signe des analystes: $L = -\Delta$ pour le laplacien). Les arguments restent encore valables, la sous-section 7.2 se traitant à l'aide de la remarque finale. On a donc le résultat suivant:

THÉORÈME 8.1. *Soit L un opérateur elliptique adapté et faiblement cœrcif sur M, tel que $L \cdot 1 = 0$ et que la fonction de Green tende vers 0 à l'infini.*

Alors le théorème 5.1 *s'étend aux fonctions L-harmoniques (avec la notion d'énergie adéquate).*

Ce théorème permet de retrouver le cas euclidien. Considérons le demi-espace $\mathbb{R}^v \times \mathbb{R}_+^*$ avec son laplacien usuel Δ_{eucl}. Si on le munit de la métrique $ds^2 = y^{-2}(dx^2 + dy^2)$, on obtient l'espace hyperbolique standard sur lequel l'opérateur $L = y^2 \Delta_{\text{eucl}}$ (différent du laplacien hyperbolique dès la dimension 3) vérifie les hypothèses du théorème précédent (v. [Anc87]). Les deux opérateurs ayant les mêmes fonctions harmoniques, on retrouve ainsi le résultat euclidien avec la formule de l'intégrale d'aire.

Remerciements

C'est avec plaisir que nous remercions Alano Ancona pour ses remarques stimulantes et l'intérêt qu'il a porté à ce travail.

RÉFÉRENCES

[Anc87] ALANO ANCONA, *Negatively curved manifolds, elliptic operators and the Martin boundary*, Ann. of Math. *125* (1987), 495–536.

[Anc90] ALANO ANCONA, *Théorie du potentiel sur les graphes et les variétés*, in P. L. Hennequin (ed.), *École d'été de probabilités de Saint-Flour XVIII*. Springer, Lect. Notes in Math. 1427, Berlin, 1990.

[And83] M. T. ANDERSON, *The Dirichlet problem at infinity for manifolds of negative curvature*. J. Diff. Geometry. *18* (1983), 701–721.

[AS85] M. T. ANDERSON and R. SCHOEN, *Positive harmonic functions on complete manifolds of negative curvature*. Annals of Math. *121* (1985), 429–461.

[Bro77] JEAN BROSSARD, *Utilisation du mouvement brownien à l'étude du comportement à la frontière des fonctions harmoniques dans un demi-espace*. Thèse de troisième cycle, Grenoble, 1977.

[Bro78] JEAN BROSSARD, *Comportement non-tangentiel et comportement brownien des fonctions harmoniques dans un demi-espace*. Dèmonstration probabiliste d'un thèorème de Calderón et Stein. Séminaire de Probabilités, Université de Strasbourg, *XII* (1978), 378–397.

[Cal50a] A. P. CALDERÓN, *On a theorem of Marcinkiewicz and Zygmund*. Trans. of A.M.S. *68* (1950), 55–61.

[Cal50b] A. P. CALDERÓN, *On the behaviour of harmonic functions at the boundary*. Trans. of A.M.S., *68* (1950), 47–54.

[CY75] S.-Y. CHENG and S.-T. YAU, *Differential equations on riemannian manifolds and their geometric applications*. Comm. Pure Appl. Math. *28* (1975), 333–354.

[Doo57] J. L. DOOB, *Conditional brownian motion and the boundary limits of harmonic functions*. Bull. de la S.M.F. *85* (1957), 431–468.

[Dur84] RICHARD DURRETT, *Brownian Motion and Martingales in Analysis*. Wadsworth Advanced Books & Software, 1984.

[EO73] P. EBERLEIN and B. O'NEILL, *Visibility manifolds*. Pac. J. Math. *46* (1973), 45–109.

[Fat06] PIERRE FATOU, *Séries trigonométriques et séries de Taylor*. Acta Math., *30* (1906), 335–400.

[GHL87] SYLVESTRE GALLOT, DOMINIQUE HULIN and JACQUES LAFONTAINE, *Riemannian Geometry*. Berlin–Heidelberg–New York–London–Paris–Tokyo, Springer-Verlag, 1987.

[Kif86] Y. KIFER, *Brownian motion and positive harmonic functions on complete manifolds of non-positive curvature*. Pitman Research Notes in Math. *150* (1986), 187–232.

[Kor91] A. KORÁNYI, *Potential Theory*. Amer. Math. Soc. Abst., *12* (1991), 359.

[KP76] A. KORÁNYI and R. B. PUTZ, *Local Fatou theorem and area theorem for symmetric spaces of rank one*. Trans. Amer. Math. soc. *224* (1976), 157–168.

[KP81] A. KORÁNYI and R. B. PUTZ, *An area theorem for products of symmetric spaces of rank one*. Bull. Sc. math. *105* (1981), 3–16.

[Led90] FRANÇOIS LEDRAPPIER, *Harmonic measures and Bowen–Margulis measures*. Israël J. Math. *71* (1990), 275–287.

[McK69] H. P. MCKEAN, *Stochastic Integrals*. New York–London, Academic Press, 1969.

[MM77] M.-P. MALLIAVIN and P. MALLIAVIN, *Intégrales de Lusin–Calderón pour les fonctions biharmoniques*. Bull. Sc. Math. *101* (1977), 357–384.

[Mos60] JÜRGEN MOSER, *A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations*. Comm. Pure Appl. Math. *13* (1960), 456–468.

[Mou94] FRÉDÉRIC MOUTON, *Convergence non-tangentielle des fonctions harmoniques en courbure négative*. Thèse de Doctorat, Grenoble, 1994.

[MZ38] J. MARCINKIEWICZ and A. ZYGMUND, *A theorem of Lusin*. Duke Math. J. *4* (1938), 473–485.

[Pin78] M. A. PINSKY, *Stochastic riemannian geometry*, in A. T. Bharucha-Reid (ed.), *Problabilistic Analysis and Related Topics*. Academic Press, 1978.

[Pra75] J.-J. PRAT, *Étude asymptotique et convergence angulaire du mouvement brownien sur une variété à courbure négative*. C.R.A.S. Paris *280* (1975), A.1539–A.1542.

[Pri16] I. I. PRIVALOV, *Sur les fonctions conjugées*. Bull. Soc. Math. France (1916), 100–103.

[Spe43] D. C. SPENCER, *A function theoric identity*. Amer. J. Math. *65* (1943), 147–160.

[Ste61] E. M. STEIN, *On the theory of harmonic functions of several variables II*. Acta Math. *106* (1961), 137–174.

[Sul83] DENNIS SULLIVAN, *The Dirichlet problem at infinity for a negatively curved manifold*. J. of Diff. Geom. *18* (1983), 723–732.

Institut Fourier
UFR de Mathématiques
URA 188 du CNRS
100 rue des Maths
BP 74
F-38402 Saint Martin d'Hères
Email: mouton@fourier.grenet.fr

Received September 21, 1994

Buchanzeigen

BERNARD DWORK. **An Introduction to G-functions**, Giovanni Gerotto Francis J. Sullivan, Princeton University Press, 1994, 322 pp., $29.95.

Preface – Introduction – List of Symbols – I. Valued Fields – 1. Valuation – 2. Complete Valued Fields – 3. Normed Vector Spaces – 4. Hensel's Lemma – 5. Extensions of Valuations – 6. Newton Polygons – 7. The y-intercept Method – 8. Ramification Theory – 9. Totally Ramified Extensions – II. Zeta Functions – 1. Logarithms – 2. Newton Polygons for Power Series – 3. Newton Polygons for Laurent Series – 4. The Binomial and Exponential Series – 5. Dieudonné's Theorem – 6. Analytic Representation of Additive Characters – 7. Meromorphy of the Zeta Function of a Variety – 8. Condition for Rationality – 9. Rationality of the Zeta Function – Appendix to Chapter II – III. Differential Equations – 1. Differential Equations in Characteristic p – 2. Nilpotent Differential Operators. Katz-Honda Theorem – 3. Differential Systems – 4. The Theorem of the Cyclic Vector – 5. The Generic Disk. Radius of Convergence – 6. Global Nilpotence. Katz's Theorem – 7. Regular Singularities – Fuchs' Theorem – 8. Formal Fuchsian Theory – IV. Effective Bounds. Ordinary Disks – 1. p-adic Analytic Functions – 2. Effective Bounds. The Dwork-Robba Theorem – 3. Effective Bounds for Systems – 4. Analytic Elements – 5. Some Transfer Theorem – 6. Logarithms – 7. The Binomial Series – 8. The Hypergeometric Function of Euler and Gauss – V. Effective Bounds. Singular Disks – 1. The Dwork-Frobenius Theorem – 2. Effective Bounds for Solutions in a Singular Disk: the Case of Nilpotent Monodromy, The Christol-Dwork Theorem: Outline of the Proof – 3. Proof of Step V. – 4. Proof of Step IV. The Shearing Transformation – 5. Proof of Step III. Removing Apparent Singularities – 6. The Operators o and υ – 7. Proof on Step I. Construction of Frobenius – 7. Proof of Step II. Effective Form on the Cyclic Vector – 9. Effective Bounds. The Case of Unipotent Monodromy. – VI. Transfer Theorems into Disks with one Singularity – 1. The Type of a Number – 2. Transfer into Disks with one Singularity: a First Estimate – 3. The Theorem of Transfer in Radii of Convergence – VII. Differential Equations of Arithmetic Type – 1. Height – 2. The Theorem of Bombieri-André – 3. Transfer Theorems for Differential Equations of Arithmetic Type – 4. Size of Local Solution Bounded by its Global Inverse Radius – 5. Generic Global Inverse Radius Bounded by the Global Inverse Radius of a Local Solution Matrix – VIII. G-Series. The Theorem of Chudnovsky – 1. Definition of G-Series. Statement of Chudnovsky's Theorem – 2. Preparatory Results – 3. Siegel's Lemma – 4. Conclusion of the Proof of Chudnovsky's Theorem – Appendix to Chapter VIII – Appendix 1 Convergence for Differential Equations – Appendix II Archimedean Estimates – Appendix III Cauchy's Theorem – Bibliography – Index.

NICOLAS BOURBAKI, **Elements of the History of Mathematic**, Springer Verlag, 1994, 201 pp., DM. 78.–

1. Foundations of Mathematics; Logic; Set Theory – 2. Notation; Combinatorial Analysis – 3. The Evolution of Algebra – 4. Linear Algebra and Multilinear Algebra – 5. Polynomials and Commutative Fields – 6. Divisibility; Ordered Fields – 7. Commutative Algebra. Algebraic Number Theory – 8. Non Commutative Algebra – 9. Quadratic Forms; Elementary Geometry – 10. Topological Spaces – 11. Uniform Spaces – 12. Real Numbers – 13. Exponentials and Logarithms – 14. n Dimensional Spaces – 15. Complex Numbers; Measurement of Angles – 16. Metric Spaces – 17. Infinitesimal Calculus – 18. Asymptotic Expansions – 19. The Gamma Function – 20. Function Spaces – 21. Topological Vector Spaces – 22. Integration in Locally Compact Spaces – 23. Haar Measure. Convolution – 24. Integration in Non Locally Compact Spaces – 25. Lie Groups and Lie Algebras – 26. Groups Generated by Reflections; Root Systems – Bibliography – Index.